

Mocniny s celočíselným mocnitelem

Pro počítání s mocninami s celočíselným mocnitelem platí již uvedená pravidla, navíc dále platí:

Pro každá reálná čísla a, b , kde $a, b \neq 0$ a přirozené číslo n platí

$$a^0 = 1$$

($0^0 \dots \dots$ není definováno)

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$$

$$\frac{1}{a^{-n}} = a^n$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n = \frac{b^n}{a^n}$$

1. Z množiny čísel vyberte

$$\left\{ \left(\frac{1}{2}\right)^{-4}; 3 \cdot 2^3; (3 - 2^2)^2; (-2^2)^2; (-1)^{-6}; \pi^{-1}; (-0, \bar{3})^3; \left[\left(-\frac{1}{5}\right)^2 \right]^{-1}; 19^0 \right\}$$

a) všechna záporná čísla:

b) všechna přirozená čísla:

c) všechna reálná čísla, která nejsou racionální:

d) všechna reálná čísla, která se sobě rovnají:

2. Zapište následující čísla ve tvaru $a \cdot 10^n$, kde n je celé číslo a pro číslo a platí $1 \leq a < 10$.

a) 25 000 =

b) 0,000 242

c) 9 999 900 =

d) 0,143 =

e) 1 234 567 =

f) 0,000 000 007 1=

g) 31 =

h) 510,058 =

3. Zapište následující čísla pomocí rozvinutého zápisu.

a) 214,731 =

b) 0,927 8 =

c) 100,05 =

d) 0,010 101=

4. Vypočítejte z paměti následující mocniny.

a) $3^{-3} =$

b) $(-5)^{-3} =$

c) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-2} =$

d) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3} =$

e) $0,9^{-2} =$

f) $(0,1)^{-4} =$

g) $-(-1)^{14} =$

h) $2^{-2} =$

5. Vypočítejte z paměti následující mocniny.

a) $-3^{-1} \cdot 3^1 =$

b) $(2^{-1})^2 =$

c) $2^3 \cdot 5^{-2} =$

d) $-1^{-1} \cdot (-1)^3 =$

e) $-4^{-2} \cdot 16 =$

f) $[(-2)^2]^{-2} =$

g) $\frac{5^2}{5^{-1}} =$

h) $\left(\frac{2}{5}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{5}{2}\right) =$

6. Zapište ve tvaru jedné mocniny.

a) $5^{-2} \cdot 5^4 \cdot 5^1 =$

b) $(3^{-2})^3 =$

c) $4^0 \cdot 4^{-2} \cdot 4^{10} =$

d) $\frac{3^{-3}}{3^2 \cdot 3^{-5}} =$

10. Vypočítejte následující úlohy

a) $\frac{5^{-1} \cdot 5^{-2}}{5^{-3} \cdot 5^4} =$

b) $\frac{(7^2 \cdot 2^2)^2 \cdot 2^{-2}}{7^3 \cdot (-2^2)^2} =$

$$\text{c) } \frac{(-5)^4 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^0 \cdot (-3)^2}{(3^3 \cdot 5)^2 \cdot (-3)^2 \cdot 3^{-4}} =$$

$$\text{d) } \frac{2^3 \cdot 3^{-2} \cdot (-2)^5}{(-2^3)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} \cdot 3^{-3}} =$$

11. Vypočítejte následující úlohy.

$$\text{a) } 13 \cdot 2^2 - 7 \cdot 2^2 + 5 \cdot 2^{-2} - 2^{-2} =$$

$$\text{b) } 20 \cdot 3^{-2} - (-4)^2 - 2 \cdot 9^{-1} - 12 \cdot (-1)^{-10} =$$

$$\text{c) } 7 \cdot 3^{-2} - 1^2 \cdot (-1)^{-3} - 3^{-2} \cdot 2^4 - 5^0 \cdot (-1)^4 =$$

$$\text{d) } \left(\frac{3}{2}\right)^3 + 5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 + 5 \cdot 4^{-2} + 11 \cdot 2^{-4} =$$

12. Vypočítejte následující úlohy.

$$\text{a) } \frac{\left(\frac{5}{2}\right)^{-2} \cdot 125 + 2^3 \cdot 125}{125 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^{-2} + 10 \cdot 2^3} =$$

$$\text{b) } [(2^{-1} + 1)^{-1} - 1^{-1}]^{-2} =$$

$$\text{c) } \frac{\left[\left(\frac{3}{4}\right)^{-1} - 1\right]^{-2} - 5^0 \cdot 3}{\left(\frac{1}{3}\right)^{-4} - 3^1} =$$

$$\text{d) } \frac{(-2)^{-2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} + \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}}{11^0 \cdot 5^{-3} \cdot 0,2^{-2} + 5^{-1}} =$$

Odmocniny

Je-li n přirozené číslo, pak n -tá odmocnina z nezáporného čísla a je nezáporné číslo x , pro které platí $x^n = a$

Odmocninu zapisujeme $x = \sqrt[n]{a}$

Číslo a se nazývá základ (odmocněnec), n je exponent (odmocnitel) a symbol $\sqrt{}$ je odmocnítko.

Odmocniny lze zapsat jako **mocniny s racionálním exponentem**.

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

Tento zápis umožňuje použití všech pravidel pro počítání s mocninami.

Pro počítání s odmocninami pak platí analogická pravidla:

$$\sqrt[n]{0} = 0$$

$$\sqrt[n]{1} = 1$$

$$\sqrt[1]{a} = a$$

$$\sqrt[2]{a} \text{ zapisujeme } \sqrt{a}$$

$$\sqrt{a^2} = |a|$$

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$$

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

$$\sqrt[r]{\sqrt[s]{a}} = \sqrt[r \cdot s]{a}$$

$$\sqrt[n \cdot p]{a^{m \cdot p}} = \sqrt[n]{a^m}$$

Příklady k procvičení:

1. Určete z paměti druhou a třetí odmocninu:

a) $\sqrt{49}$

b) $\sqrt[3]{8}$

c) $\sqrt{81}$

d) $\sqrt[3]{27}$

e) $\sqrt{121}$

f) $\sqrt{64}$

g) $\sqrt{144}$

h) $\sqrt[3]{125}$

2. a) $\sqrt{100}$

b) $\sqrt[3]{1000}$

c) $\sqrt{0,09}$

d) $\sqrt{2500}$

e) $\sqrt[3]{0,001}$

f) $\sqrt{10\,000}$

g) $\sqrt[3]{0,000\,001}$

h) $\sqrt[3]{64\,000}$

3. a) $\sqrt{0,16}$

b) $\sqrt[3]{0,008}$

c) $\sqrt{0,0025}$

d) $\sqrt[3]{0,027}$

e) $\sqrt{1,44}$

f) $\sqrt[3]{0,125}$

g) $\sqrt{8100}$

h) $\sqrt{490\,000}$

4. Určete odmocniny pomocí kalkulačky:

a) $\sqrt{726,359}$

b) $\sqrt{2\,973,5}$

c) $\sqrt{5,736}$

d) $\sqrt{0,063}$

e) $\sqrt[3]{81}$

f) $\sqrt[3]{8\,000}$

g) $\sqrt[3]{0,063}$

h) $\sqrt[3]{2563}$

i) $\sqrt[4]{2401}$

j) $\sqrt[5]{0,000\,32}$

k) $\sqrt[6]{168}$

1. Z množiny čísel vyberte:

$$\left\{ 5\sqrt{2}; \sqrt[3]{125}; \sqrt[3]{\frac{1}{27}}; \sqrt{81}; -\sqrt{10}; \sqrt{0}; -3\sqrt{3}; \sqrt[4]{16}; \sqrt[3]{0,008} \right\}$$

- a) Všechna čísla, která jsou částečně odmocněna
- b) Všechna celá čísla
- c) Všechna racionální čísla, která nejsou celá
- d) Všechna reálná čísla, která jsou menší než 1

2. Uveďte příklad:

- a) Odmocniny z odmocniny
- b) Číslo, jehož pátá odmocnina je celé číslo
- c) Podíl třetích odmocnin
- d) Číslo, jehož čtvrtá odmocnina je liché prvočíslo

3. Vypočítejte z paměti následující odmocniny:

a) $\sqrt{360\,000}$

b) $\sqrt{0,25}$

c) $\sqrt[3]{8\,000}$

d) $\sqrt{14\,400}$

e) $\sqrt{0,000\,081}$

f) $\sqrt[3]{0,001}$

g) $\sqrt{4\,900}$

h) $\sqrt{0,04}$

4. Rozhodněte, zda jsou uvedené výpočty správné:

a) $\sqrt{16 + 9} = \sqrt{16} + \sqrt{9}$

b) $\sqrt[3]{1000} = \sqrt{100} = 10$

c) $\sqrt[3]{\sqrt{64}} = \sqrt[6]{64} = 2$

d) $\frac{1}{\sqrt[3]{27}} = \sqrt[3]{\frac{1}{27}} = \frac{1}{\sqrt{9}}$

5. Rozhodněte, zda jsou následující tvrzení pravdivá:

a) Odmocnina z racionálního čísla musí být vždy racionální číslo

b) Částečně odmocnit lze každou druhou odmocninu, jejíž základ je násobkem 9.

c) Podíl libovolných dvou odmocnin lze vyjádřit jako odmocninu podílu.

d) Pátá odmocnina z čísla umocněného na druhou je rovna druhé odmocnině z čísla umocněného na pátou

6. Doplňte do tabulky čísla ve tvaru $x, \sqrt{a}, \sqrt[3]{b}, \sqrt[4]{c}$ tak, aby platilo:

$\sqrt{a} = x, \sqrt[3]{b} = x, \sqrt[4]{c} = x$, kde x, a, b, c jsou nezáporná reálná čísla

x	2					
$\sqrt{a}$			$\sqrt{0,09}$		$\sqrt{\frac{1}{25}}$	
$\sqrt[3]{b}$		$\sqrt[3]{1}$				
$\sqrt[4]{c}$				$\sqrt[4]{\pi^4}$		$\sqrt[4]{81}$

7. Vypočítejte následující odmocniny

a) $\sqrt[3]{0,729} =$

b) $\sqrt[4]{2\,560\,000} =$

c) $\sqrt{6,25} =$

d) $\sqrt[5]{0,000\,32} =$

e) $\sqrt{1,21} =$

f) $\sqrt[8]{0,000\,002\,56} =$

g) $\sqrt[3]{\frac{125}{27}} =$

h) $\sqrt{2,25} =$

8. Vypočítejte následující úlohy

a) $\sqrt[3]{200} \cdot \sqrt[3]{5} =$

b) $\sqrt[3]{64\sqrt{64}} =$

c) $\sqrt[3]{7^6} =$

d) $(\sqrt[6]{196})^3 =$

e) $\sqrt{121 \cdot 144} =$

f) $\sqrt{\sqrt[5]{10^{10}}} =$

g) $\sqrt[4]{\frac{625}{81}} =$

h) $\frac{\sqrt[5]{160}}{\sqrt[5]{5}} =$

9. Zapište následující čísla jako jednu odmocninu.

a) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{27}} =$

b) $\sqrt{5} \cdot \sqrt[3]{5^2} \cdot \sqrt[3]{5^4} =$

c) $\sqrt[3]{7 \cdot \sqrt{7}} =$

d) $\sqrt{\frac{\sqrt[3]{6}}{\sqrt{6}}} =$

10. Následující odmocniny částečně odmocněte.

a) $\sqrt{75} =$

b) $\sqrt[3]{250} =$

c) $\sqrt[3]{81} =$

d) $\sqrt{600} =$

e) $\sqrt[3]{72} =$

f) $\sqrt{392} =$

g) $\sqrt[3]{625} =$

h) $\sqrt[3]{384} =$

11. Vypočítejte následující úlohy.

a) $5\sqrt{6} - 6\sqrt{24} + 3\sqrt{54} + 2\sqrt{150} - \sqrt{216} =$

b) $7\sqrt{3} + 5\sqrt{48} - 2\sqrt{75} - 2\sqrt{81} + 3\sqrt{147} =$

c) $6\sqrt[3]{3} - 7\sqrt[3]{24} + 2\sqrt[3]{192} + 12\sqrt[3]{81} - 9\sqrt[3]{375} =$

d) $-6\sqrt[3]{7} - 7\sqrt[3]{56} + 5\sqrt[3]{189} + 4\sqrt[3]{343} =$

12. Vypočítejte následující úlohy

a) $\sqrt[3]{14} \cdot \sqrt[3]{140} \cdot \sqrt[3]{175} =$

b) $\sqrt[4]{36} \cdot \sqrt[4]{72} \cdot \sqrt[4]{128} =$

c) $\sqrt[3]{0,56} \cdot \sqrt[3]{6,4} \cdot \sqrt[3]{49} =$

d) $\frac{\sqrt[3]{10} \cdot \sqrt[3]{20}}{\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{100}} =$

3. Zapište následující výrazy jako odmocninu.

a) $2^{\frac{5}{4}} =$

b) $7^{\frac{1}{7}} =$

c) $2,5^{0,1} =$

d) $1,96^{\frac{1}{2}} =$

e) $\left(\frac{9}{10}\right)^{\frac{3}{11}} =$

f) $\left(\frac{5}{2}\right)^{-\frac{5}{6}} =$

g) $0,005^{\frac{9}{5}} =$

h) $(\sqrt{2})^{\frac{1}{3}} =$

4. Zapište následující výrazy jako mocniny s kladným exponentem

a) $\sqrt[3]{5^{-2}} =$

b) $\sqrt[3]{\sqrt{6}} =$

c) $\sqrt[7]{\left(\frac{1}{8}\right)^2} =$

d) $\frac{1}{3\sqrt{3}} =$

e) $\sqrt[5]{\frac{1}{3^{-4}}} =$

f) $\frac{5}{\sqrt[5]{5}} =$

g) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{12^{-1}}} =$

h) $4(\sqrt{2})^{\frac{1}{3}} =$

7. S využitím pravidel pro počítání s mocninami vypočtěte a výsledek zapište jako odmocninu.

a) $\left(2^{\frac{2}{3}} \cdot 5^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{9}{2}} =$

b) $3^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{\frac{2}{9}} \cdot 3^{\frac{7}{12}} =$

c) $(7^{-1})^{-3} \cdot 7^{-\frac{3}{2}} \cdot 7^{\frac{1}{2}} =$

d) $\frac{\left(3 \cdot 3^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}}{3^{\frac{1}{4}}} =$

8. Odmocniny vyjádřete jako mocniny a vypočítejte.

a) $\left(\frac{1}{\sqrt{7}}\right)^{-3} \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{7^6}} \cdot \sqrt{7} =$

b) $\sqrt[3]{4\sqrt{4}} \cdot \sqrt[3]{9\sqrt{9}} =$

c) $\frac{\sqrt{7} \cdot \sqrt[3]{2^4} \cdot \sqrt[6]{7^5}}{14} =$

d) $\frac{\sqrt{6} \cdot \sqrt[3]{3^4}}{\sqrt[4]{12^3}} =$

Příklady k domácí přípravě

1. Zapište jako mocninu:

a) $\sqrt[3]{8^2}$

b) $\sqrt[4]{2^{-3}}$

c) $(\sqrt[5]{4})^2$

2. Zapište jako odmocninu:

a) $2^{\frac{2}{5}}$

b) $3^{\frac{-1}{3}}$

c) $9^{\frac{2}{5}}$

3. Vypočtěte:

a) $49^{\frac{1}{2}}$

b) $16^{\frac{-3}{2}}$

c) $27^{\frac{2}{3}}$

4. Vypočtěte:

a) $\sqrt[3]{3^6}$

b) $\sqrt[4]{25^2}$

c) $\sqrt[5]{2^{10}}$

5. Odmocněte:

a) $\sqrt{\frac{16}{49}}$

b) $\sqrt[3]{\frac{27}{64}}$

c) $\sqrt{\frac{64}{121}}$

6. Rozložte na součin a částečně odmocněte:

a) $\sqrt{20}$

b) $\sqrt{75}$

c) $\sqrt{80}$

d) $\sqrt{63}$

7. Zjednodušte a zapište jako odmocninu:

a) $3\sqrt{3}$

b) $2^3\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{2}$

c) $\sqrt[3]{6^4\sqrt{6}}$

d) $\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{2}}$

8. Vyjádřete mocninami s kladnými exponenty a vypočtěte:

a) 3^{-2}

b) -2^{-3}

c) $(-2)^{-3}$

d) $\left(\frac{3}{4}\right)^{-1}$

e) $\left(\frac{4}{3}\right)^{-2}$

f) $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-3}$