

Logaritmus

Logaritmus kladného čísla x o základu a kladném a různém od 1 je exponent y , kterým umocníme základ a , abychom dostali číslo x .

Platí tedy: $\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x$

(Dekadický logaritmus – základ 10 – označení místo $\log_{10}$ píšeme jen $\log$,

přirozený logaritmus – základ číslo e označujeme $\ln$)

Příklady k procvičení:

Na základě definice vypočtete neznámou

1. Určete hodnotu logaritmu:

a) $\log_2 16 =$

b) $\log_3 27 =$

c) $\log_5 5 =$

d) $\log_{\frac{1}{9}} \frac{1}{3} =$

e) $\log_6 \frac{1}{36} =$

f) $\log_9 81 =$

g) $\log_3(-27) =$

h) $\log_4 1 =$

i) $\log_1 25 =$

j) $\log 1000 =$

k) $\log 0,01 =$

l) $\ln 1 =$

2. Určete hodnotu čísla x :

a) $\log_2 x = 3$

b) $\log_3 x = 1$

c) $\log_5 x = 2$

d) $\log_4 x = 0$

e) $\log_5 x = -3$

f) $\log_9 x = \frac{1}{2}$

g) $\log_6 x = 36$

h) $\log_{\frac{1}{4}} x = -2$

i) $\log x = -2$

3. Určete hodnotu základu a :

a) $\log_a 49 = 2$

b) $\log_a \frac{1}{16} = -4$

c) $\log_a 125 = 3$

d) $\log_a 81 = 4$

e) $\log_a 2 = \frac{1}{2}$

f) $\log_a 1000 = 3$

PS 30 – 32

1. Vyberte pravdivá tvrzení.

a) Logaritmus kladného čísla je definován pro libovolný základ různý od 1.

b) Základem dekadického logaritmu je číslo 10.

c) Základem přirozeného logaritmu je číslo π .

d) Logaritmus kladného čísla je exponent, na který musíme umocnit kladný základ různý od jedné, abychom dostali logaritmované číslo.

2. Rozhodněte, zda jsou následující logaritmické výrazy definovány. V případě kladné odpovědi určete základy těchto logaritmů.

a) $\log_{0,25} \frac{1}{16}$ $a =$

b) $\log_5(-25)$ $a =$

c) $\log \sqrt[3]{2}$ $a =$

d) $\log_1 18$ $a =$

e) $\log_{-2} 24$ $a =$

f) $\ln \sqrt{0,02}$ $a =$

3. Vypočtěte následující logaritmy.

a) $\log_3 9 =$

b) $\log_2 16 =$

c) $\log_2 128 =$

d) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4} =$

e) $\log_3 3 =$

f) $\log_{\frac{1}{3}} 3 =$

g) $\log 100 =$

h) $\log 10^{41} =$

i) $\log \frac{1}{1000} =$

j) $\log 0,1 =$

k) $\log_{25} 5 =$

l) $\log_{\sqrt{5}} 5 =$

m) $\log_{0,25} 4 =$

n) $\log_3 1 =$

o) $\ln e =$

p) $\ln 1 =$

q) $\log_7 \sqrt[3]{7} =$

r) $\log_{16} \sqrt{2} =$

4. Vyberte, co platí pro hodnotu výrazu $\log_5 \sqrt{125}$

a) Hodnota výrazu je číslo menší než 1

b) Hodnota výrazu je celé číslo větší než 1

c) Hodnota výrazu je záporné číslo

d) Hodnota výrazu je číslo z intervalu $\langle 1,5 ; 4 \rangle$

5. Vypočítejte hodnotu daného výrazu.

$$\log_2 4 + \log_4 2 - \log_{0,5} 0,5 + \log_4 \frac{1}{4} =$$

8. Najděte číslo x , pro které platí daná rovnost.

a) $\log_2 x = 4$

b) $\log x = 0$

c) $\log_{0,25} x = 1$

d) $\ln x = -3$

9. Najděte číslo a , pro které platí daná rovnost.

a) $\log_a 25 = 2$

b) $\log_a 10^5 = 5$

c) $\log_a \frac{1}{16} = -4$

d) $\log_a 8 = 1$

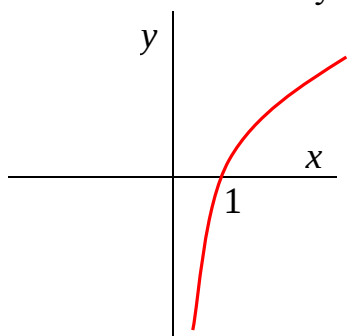
Logaritmická funkce

Logaritmickou funkcí o základu a se nazývá funkce, která je daná rovnicí

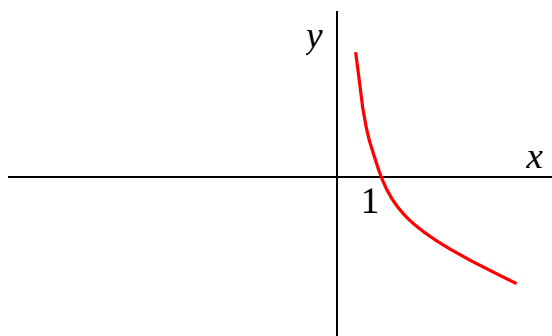
$$y = \log_a x$$

Číslo a je kladné číslo, různé od jedničky a $x \in \mathbb{R}, x > 0$.

Definičním oborem logaritmické funkce je množina kladných reálných čísel, oborem hodnot celá množina reálných čísel



$$a > 1$$



$$a < 1$$

Vlastnosti logaritmické funkce $y = \log_a x$

$$D = (0 ; \infty)$$

$$H = \mathbb{R}$$

Je rostoucí a prostá

Je klesající a prostá

Osa y je asymptotou grafu

Není omezená zdola, není omezená shora

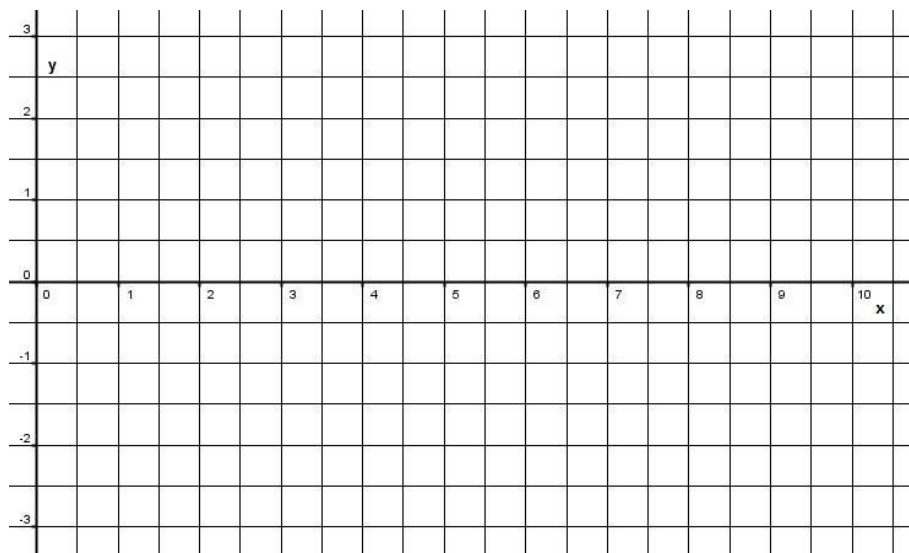
Nemá maximum ani minimum

Hodnota v bodě 1 je 0

Je inverzní k exponenciální funkci $y = a^x$

15. Je dána funkce $f: y = \log_3 x$. Doplňte tabulku a načrtněte graf.

x	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9
y	-2				


 $D(f) =$
 $H(f) =$

 Funkce f :

rostoucí

klesající

konstantní

sudá

lichá

prostá

omezená

shora

omezená zdola

omezená

maximum

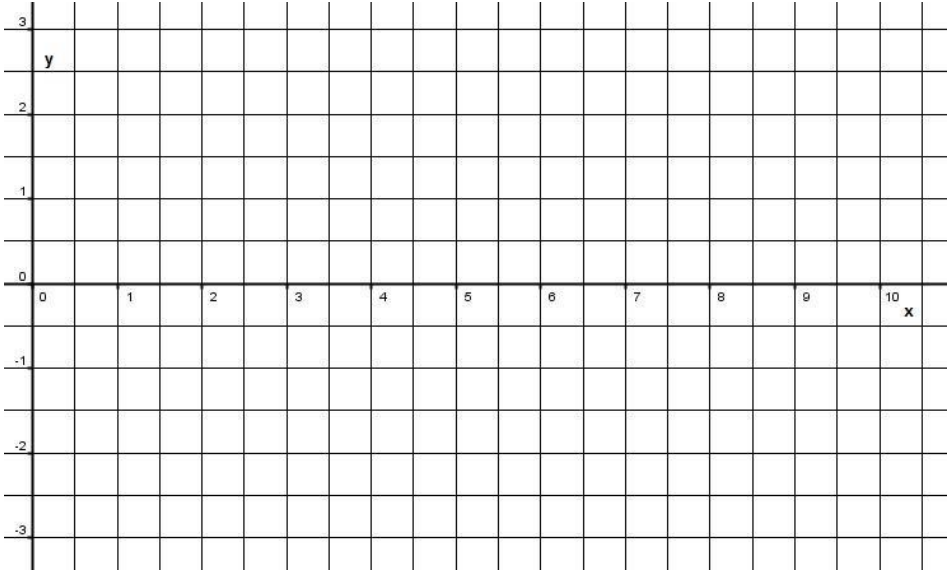
minimum

16. Je dána funkce $f: y = \log_{\frac{1}{3}} x$. Doplňte tabulku a načrtněte graf.

x	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9
y	2			-1	

$D(f) =$

$H(f) =$



Funkce f :

rostoucí

klesající

konstantní

sudá

lichá

prostá

omezená shora

mezená zdola

omezená

maximum

minimum

17. Rozhodněte, zda jsou následující funkce rostoucí nebo klesající.

a) $f_1: y = \log_7 x$

b) $f_2: y = \ln x$

c) $f_3: y = \log x$

d) $f_4: y = \log_{0,7} x$

e) $f_5: y = \log_{\frac{4}{3}} x$

f) $f_6: y = \log_{\frac{3}{4}} x$

18. Vyberte vhodnou možnost (nehodící se škrtněte) tak, aby vzniklo pravdivé tvrzení.

- a) Logaritmická funkce je inverzní k funkci mocninné / exponenciální.
- b) Definičním oborem logaritmické funkce je množina všech reálných č. / kladných reálných č.
- c) Grafy log. funkce a k ní inverzní jsou souměrně sdružené podle osy y / přímky $y=x$
- d) Logaritmická funkce se základem a je klesající pro $a \in (0; 1)$ / $a \in (1; \infty)$
- e) Oborem hodnot logaritmické funkce je R / R^+
- f) Graf funkce $y = \log_{4,5} x$ protíná osu y v bodě $[0; 1]$ / neprotíná osu y

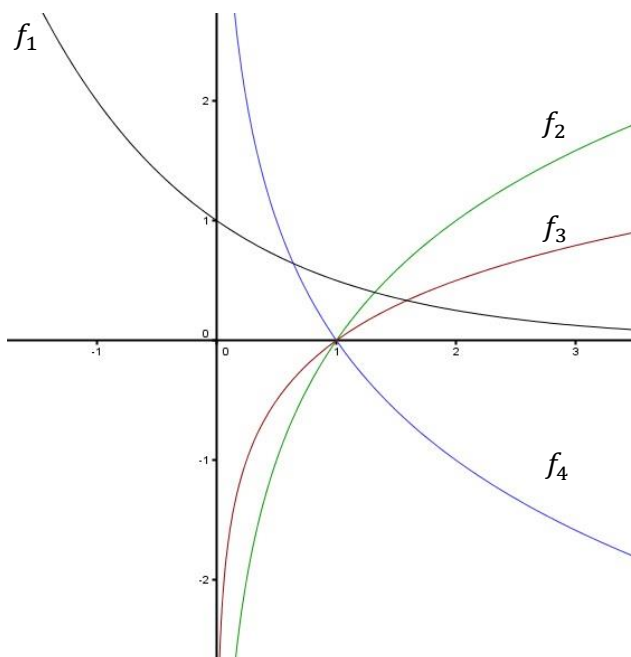
19. Podle grafů na obrázku запиšte k jednotlivým předpisům funkcí jejich označení.

a) $y = \log_2 x$

b) $y = \log_{\frac{1}{2}} x$

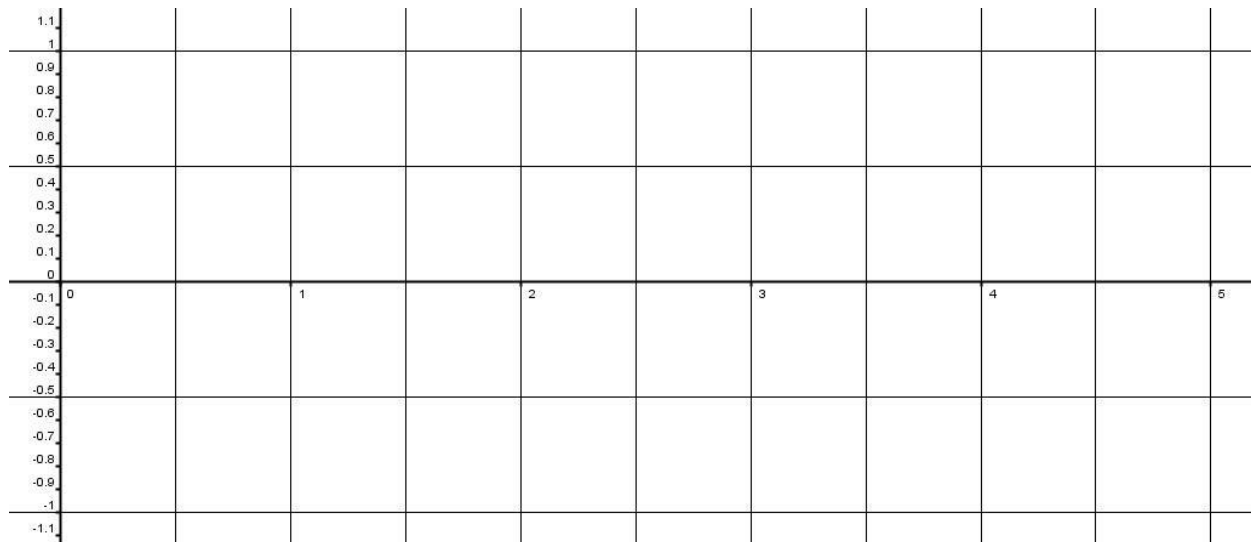
c) $y = \log_4 x$

d) $y = \frac{1}{2^x}$



20. Načrtněte graf funkce $y = \log x$. V grafu vyznačte hodnoty $f\left(\frac{1}{2}\right), f(1), f(2), f(3), f(4)$.

Tyto hodnoty porovnejte a seřaďte vzestupně.



21. Seřaďte podle velikosti vzestupně číselné výrazy bez výpočtu jejich hodnot.

a) $\log_{0,6} 0,1$; $\log_{0,6} 0,6$; $\log_{0,6} 1$; $\log_{0,6} 2$; $\log_{0,6} 10$

b) $\log_6 0,1$; $\log_6 6$; $\log_6 1$; $\log_6 2$; $\log_6 10$

c) $\ln 0,1$; $\ln e$; $\ln 1$; $\ln 2$; $\ln 10$

24. Porovnejte daná čísla pomocí grafů příslušných funkcí

a) $\log_2 5$ $\log_2 1$

b) $\log_{\frac{1}{2}} 5$ 1

c) $\log_2 1$ $\log_{\frac{1}{2}} 1$

d) $\log_2 \frac{3}{2}$ $\log_2 \frac{2}{3}$

e) $\log_{\frac{1}{2}} 9$ 0

f) $\log_2 \sqrt{2}$ $\log_2 1$

g) $\log_{\frac{1}{2}} \sqrt{2}$ 0

h) $\log_{\frac{1}{2}} 2^{-4}$ $\log_{\frac{1}{2}} 2^{-3}$

i) $\ln e$ 1

j) $\ln e$ $\log_2 2$

k) $\ln 1$ $\log 1$

Logaritmické rovnice

Při řešení logaritmické rovnice vycházíme z následující vlastnosti:

$$\log_a x = \log_a y \Leftrightarrow x = y$$

Úpravy rovnic využívají pravidel pro počítání s logaritmy a snahou je vyjádřit obě strany rovnice jako logaritmy o stejném základu. Následně obě strany odlogaritmujeme a rovnici bez logaritmů dopočítáme.

Pravidla pro počítání s logaritmy:

$$\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x$$

$$\log(r \cdot s) = \log r + \log s$$

$$\log(r : s) = \log r - \log s$$

$$\log r^n = n \cdot \log r$$

Pro počítání hodnot na kalkulačce je vhodné využít: $\log_a x = \frac{\log x}{\log a}$

1. Rozhodněte, zda jsou následující tvrzení pravdivá.

- a) Pro logaritmus součinu dvou kladných čísel platí: $\log_a(r \cdot s) = \log_a r + \log_a s$
- b) Pro součet logaritmů dvou kladných čísel platí: $\log_a r + \log_a s = \log_a(r + s)$
- c) Pro logaritmus podílu dvou kladných čísel platí: $\log_a \frac{r}{s} = \log_a(r - s)$
- d) Pro logaritmus rozdílu dvou kladných čísel platí: $\log_a(r - s) = \log_a r - \log_a s$
- e) Pro logaritmus mocniny kladného čísla platí: $\log_a r^s = s \cdot \log_a r$
- f) Pravidla pro počítání s logaritmy nelze při výpočtech používat současně

2. Vypočtěte hodnoty daných logaritmických výrazů.

- a) $\log_2 64 =$
- b) $\log_2 1 =$
- c) $\log_4 4 =$
- d) $\log_3 \frac{1}{3} =$
- e) $\log_{\frac{1}{2}} 2 =$
- f) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{8} =$
- g) $\log_3 \frac{1}{27} =$
- h) $\log_2 2^{14} =$
- i) $\ln e =$
- j) $e^{\ln e} =$
- k) $10^{\log 1} =$
- l) $\log(\log_2 2) =$

3. Zapište vždy jedním logaritmem následující výrazy:

- a) $\log 10 + \log 4 =$
- b) $\log_2 5 + \log_2 12 =$
- c) $\log_3 \frac{1}{8} + \log_3 8 =$
- d) $\log_6 40 - \log_6 5 =$
- e) $\log_{12} 120 - \log_{12} 150 =$
- f) $\log_3 5 + \log_3 4 - \log_3 10 =$
- g) $3 \cdot \log 2 + \log 5 =$
- h) $\ln 5 + 5 \ln 2 =$
- i) $3 \cdot \ln 2 - \ln 4 =$
- j) $-2 \cdot \log_4 5 - \log_4 \frac{1}{5} + \frac{1}{2} \log_4 10 =$

4. Pomocí vět o logaritmech vypočtete:

a) $\log 25 + \log 40 =$

b) $\log 300 - \log 3 =$

c) $\log_4 512 - \log_4 32 =$

d) $\log_4 2 + 3 \cdot \log_4 8 =$

e) $2 \cdot \log 6 + \log 5 - \log 18 =$

f) $3 \cdot \log_2 10 - \log_2 375 + \log_2 6 =$

g) $\log_4 \frac{3}{20} - \log_4 \frac{3}{5} =$

h) $\ln e^2 + 3 \ln 1 =$

5. Zapište následující čísla pomocí logaritmu s daným základem.

a) Číslo 1 jako logaritmus se základem 5. $1 =$

b) Číslo 0 jako logaritmus se základem 14. $0 =$

c) Číslo -2 jako logaritmus se základem 3. $-2 =$

d) Číslo 0,5 jako logaritmus se základem 10. $0,5 =$

6. Zapište dané výrazy ve tvaru jednoho logaritmu.

a) $2 + \log_3 4 =$

b) $\log 7 - \frac{2}{3} =$

7. Rozhodněte, zde jsou následující rovnosti platné.

a) $\log_3 10 + \log_3 4 = \log_3 8 + \log_3 5$

b) $\log_4 8 = 1 + \log_4 2$

c) $3 \cdot \log 5 = \frac{\log 500}{\log 4}$

d) $-\log_5 \frac{1}{5} = \log_{\frac{1}{5}} 5$

e) $\log_2(60 + 4) = \log 10^5$

9. Určete hodnoty následujících výrazů.

a) $\log 4 + 2 \cdot \log 5 - (\log 20 - \log 2) =$

b) $5 \cdot (\log 200 - \log 2) + \frac{1}{2} \cdot \log 25 + \log 20 =$

c) $2 \cdot (\log_3 2 + \log_3 5) - \log_3 100 =$

d) $(\log_6 2 + \log_6 3) \cdot (\log_5 250 - \log_5 10) =$

e) $\frac{1}{2} \cdot (\log_2 8 - \log_2 3) + \log_2 \sqrt{6} =$

$$\text{f) } e^{\ln 6} - 2 \cdot \log_2 8 =$$

$$\text{g) } \ln e^3 \cdot (\log_3 6 - 3) - \log_3 8 =$$

10. Zjednodušte pro přípustné hodnoty.

$$\text{a) } \log x + \log 4 =$$

$$\text{b) } \log(x + 3) - \log x + \log 3x =$$

$$\text{c) } 2 \cdot (\log 2x - \log 2) =$$

$$\text{d) } \frac{1}{3} \cdot \log_4 x - \log_4(x + 1) =$$

$$\text{e) } 4 \cdot \log(x - 1) - \log(x + 2) =$$

$$\text{f) } \log_5(x - 3) + \log_5(x + 3) - 2 \cdot \log_5 3 =$$

$$\text{g) } \frac{5}{2} \cdot \log_2 \sqrt{x} + \frac{3}{4} \cdot \log_2 x^2 - 4 \cdot \log_2 \sqrt[4]{x} =$$

$$\text{h) } \frac{1}{4} \cdot [\ln(x - 4) + \ln x - \ln 5] =$$

12. Vyjádřete dané logaritmy pomocí dekadických i přirozených logaritmů a určete jejich hodnotu na kalkulačce. Zaokrouhlete na 3 desetinná místa.

Pomocí ***log***

a) $\log_2 3 =$

b) $\log_3 6 =$

c) $\log_7 \frac{2}{5} =$

d) $\ln 200 =$

Pomocí ***ln***

$\log_2 3 =$

$\log_3 6 =$

$\log_7 \frac{2}{5} =$

$\log 200 =$

PS 47 - 59

1. Rozhodněte, zda následující zápisy představují řešitelné logaritmické rovnice.

a) $\log_2 x = 5$

b) $\log_2 x = -5$

c) $\log_{-5} x = 2$

d) $\log_{-5} x = -2$

e) $\log_{\sqrt{2}} 2x = 2$

f) $\log_a 125 = -3$

g) $\log_a(-8) = 3$

h) $\ln e = 1$

2. Řešte v $\mathbb{R}$ rovnice.

a) $\log_2 x = 3$

b) $\log_3 x = -2$

c) $\log_{0,5} x = 2$

d) $\log_2 x = \frac{1}{2}$

e) $\log_{0,5} x = -\frac{1}{3}$

f) $\log_2 \frac{x}{16} = -4$

g) $\log_7 5x = 0$

h) $\log_2(x + 1) = 3$

i) $3 \cdot \log_2 x = 15$

j) $2 + 3 \cdot \log_2(x - 1) = -7$

k) $\log_a 27 = 3$

l) $\log_{0,1a} 4 = 2$

3. Řešte v $\mathbb{R}$ rovnice. Správnost ověřte zkouškou.

a) $\log_2 \frac{x+2}{x-1} = -1$

b) $16 \cdot \ln \frac{2x}{x+7} = 0$

4. Řešte v $\mathbb{R}$ rovnice.

a) $\frac{3+\log x}{2-\log x} = 4$

b) $\log_5 \frac{500}{x+1} = \log_2 8$

5. Stanovte podmínky pro neznámou a následně řešte rovnice v $\mathbb{R}$.

a) $\log_2(x+2) = \log_2(2x+1)$

b) $\log_2(x^2+x-2) = \log_2(4-x)^2$

c) $\log_3 14x = 2 \cdot \log_3 (x + 4)$

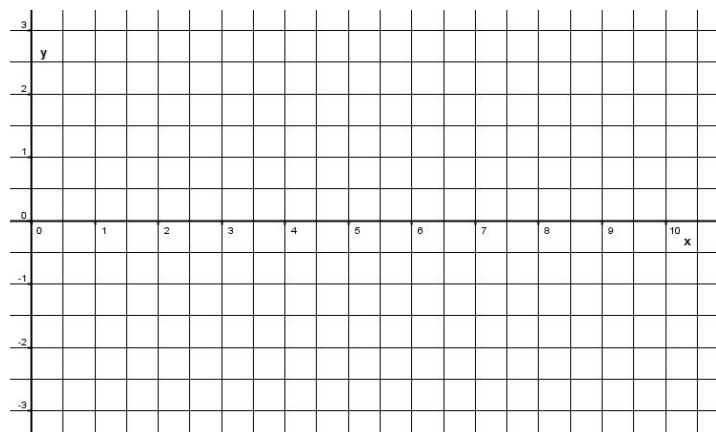
d) $\log_5 \left(x - \frac{15}{4} \right) = -\log_5 x$

Příklady k domácí přípravě

1. Doplňte tabulku a načrtněte graf funkce

$$f: y = \log_2 x$$

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
$f(x)$					



$$D(f) =$$

$$H(f) =$$

Průsečík s osou x : $P = [\quad ; \quad]$

Vlastnosti funkce:

2. Určete hodnoty následujících logaritmů

a) $\log_3 27 =$

b) $\log_2 \frac{1}{8} =$

c) $\log_{10} 1 =$

3. Určete x pro které platí:

a) $\log_3 x = 4$

b) $\log_2 x = 5$

c) $\log_4 x = 1$

4. Určete pro jaký základ a platí:

a) $\log_a 1000 = 3$

b) $\log_a 16 = 2$

c) $\log_a 27 = 3$

5. Upravte pomocí pravidel a vypočtěte:

a) $\log_6 3 + \log_6 12 =$

b) $\log_2 40 - \log_2 5 =$

c) $2 \cdot \log 5 + \log 4 =$

d) $4 \cdot \log 2 + \log 5 - \log 8 =$

6. Vyřešte rovnici a proveďte zkoušku:

$$\log(x + 3) - \log 2 = \log(x - 1)$$