

Goniometrické výrazy a rovnice

Základní vztahy mezi goniometrickými funkcemi:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{cotg} x = 1$$

Příklady k použití:

1. Zjednodušte výrazy

a) $\sin^2 x \cdot \cos x + \cos^3 x$

b) $\sin^4 x - \cos^4 x + \cos^2 x$

c) $(1 + \sin x) \cdot (1 - \sin x)$

d) $\frac{1 - \sin^2 x}{1 - \cos^2 x}$

e) $\frac{1}{\cos^2 x} - 1$

f) $\frac{\cos^2 x}{1 + \sin x}$

g) $\sin x + \cos x \cdot \operatorname{tg} x$

h) $\sin x \cdot \cos x \cdot (\operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x)$

$$(\cos x, \sin^2 x, \cos^2 x, \operatorname{cotg}^2 x, \operatorname{tg}^2 x, 1 - \sin x, 2 \sin x, 1)$$

2. Zjednodušte výrazy

a) $(1 + \cos x) \cdot (1 - \cos x)$

b) $\sin x \cdot \cos^2 x + \sin^3 x$

c) $(\sin x + \cos x)^2 - 2 \sin x \cos x$

d) $(\cos x - \sin x)^2 + (\cos x + \sin x)^2$

e) $\sin^4 x + 2 \sin^2 x \cdot \cos^2 x + \cos^4 x$

f) $\frac{\sin^2 x - \sin^4 x}{\cos^2 x - \cos^4 x}$

g) $\frac{\cos x}{1 - \sin x} + \frac{\cos x}{1 + \sin x}$

$\left(\sin^2 x, \sin x, 1, 2, 1, \sin^2 x, 1, \frac{2}{\cos x} \right)$

3. Zjednodušte výrazy s goniometrickými funkcemi

a) $\sin^2 x \cdot \cot g^2 x + \sin^2 x - 1$ b) $\cos^2 x \cdot \operatorname{tg}^2 x + \cos^2 x$

c) $\cos x \cdot (\operatorname{tg} x + \cot g x)$ d) $(1 + \operatorname{tg}^2 x) \cdot (1 - \sin^2 x) - \sin^2 x$

e) $\operatorname{tg}^2 x - \sin^2 x - \operatorname{tg}^2 x \cdot \sin^2 x$ f) $\frac{\operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$

g) $\frac{1}{1 + \operatorname{tg} x} - \frac{\cot g x}{1 + \cot g x}$ $\left(0, 1, \frac{1}{\sin x}, \cos^2 x, 0, \sin x \cos x, 0\right)$

4. Zjednodušte

h) $\frac{\sin^2 x - 1}{\cos^2 x}$

b) $2 \operatorname{tg} x \cdot \frac{\cos x}{\sin x} - \cos^2 x + 1 - \sin^2 x$

c) $\frac{5 \sin^2 x}{\cos x - 1}$

d) $(\sin x - \cos x)^2 + 2 \sin x \cos x - \operatorname{tg} x \cot g x$

e) $\frac{(\cos x \operatorname{tg} x)^2 - 1}{\cos^2 x}$

f) $2 \sin^2 x - \cot g x \cdot \frac{\sin x}{\cos x} - 5 + 2 \cos^2 x$

g) $8 - \operatorname{tg} x \cdot \frac{\cos x}{\sqrt{1 - \cos^2 x}}$

h) $\frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\cos x - \sin x} + \sin x$

5. Řešte rovnice s neznámou x:

a) $\sin x = \frac{1}{2}$

b) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

c) $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$

d) $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

e) $\cos x = -1$

f) $\sin x = 0,9876$

g) $\cos x = -0,7431$

h) $\operatorname{tg} x = 1,8807$

6. Vyřešte goniometrické rovnice:

a) $4 \cdot \cos x = 2 \cdot \sqrt{3}$

b) $1 + \sqrt{2} \cdot \sin x = 2$

c) $1 - 2 \cdot \cos x = 0$

d) $\frac{2+\sin x}{\sin x} = 5$

e) $\frac{1+\cos x}{1-\cos x} = 3$

f) $\frac{5+\sin x}{1-\sin x} = 3$

g) $\frac{\operatorname{tg} x - 3}{\operatorname{tg} x - 1} = 2$

h) $\frac{2\sin x + 1}{2 + \sin x} = 1$

i) $3 \cdot \operatorname{tg}^2 x = 1$

j) $3\sin^2 x = \cos^2 x$

7. Najděte řešení goniometrických rovnic:

a) $\sin x + 2 = 3 - \sin x$

b) $4\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} x + \sqrt{3}$

c) $\cot \operatorname{tg} x + 1 = 0$

d) $2\cos x = -3,4$

e) $2 + \sin x = 3\sin x$

f) $-\cos x - 4 = 3\cos x$

8. Řešte s využitím substituce:

a) $\cos^2 x - 6\cos x + 5 = 0$

b) $2\sin^2 x + \sin x = 1$

c) $\frac{2\sin^2 x}{3\cos x} = 1$

d) $8\cos x + 1 = -4\sin^2 x$

Odkaz na učebnici na internetu:

www.karlin.mff.cuni.cz/~robova/stranky/motyckova/Stranky_s_aplety/index.html

Příklady k domácí přípravě

1. Určete hodnoty úhlů x , pro které platí:

a) $\sin x = 0,7660$

b) $\cos x = -0,9063$

c) $\operatorname{tg} x = 3,7320$

2. Je dán ostrý úhel x , pro který platí $\cos x = \frac{4}{5}$. S využitím vlastností goniometrických funkcí určete $\sin x$, $\operatorname{tg} x$ a $\operatorname{cot} x$.

3. Upravte goniometrické výrazy:

a) $\frac{\sin^2 x}{1 - \cos x} =$

b) $1 - \sin^2 x \cdot \operatorname{cot}^2 x =$

c) $\frac{\sin x + \cos x}{1 + \operatorname{tg} x} =$

4. Vyřešte goniometrickou rovnici a proveďte zkoušku:

a) $\frac{3 - \sin x}{\sin x} = 4$

b) $\cos x \cdot \sin^2 x + \cos^3 x - 1 = 0$