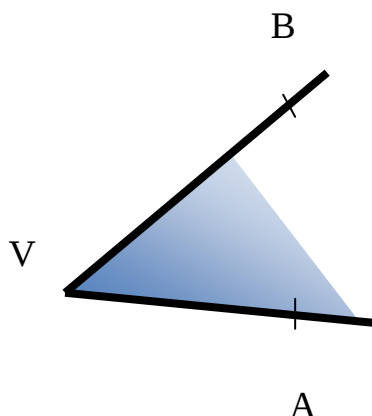
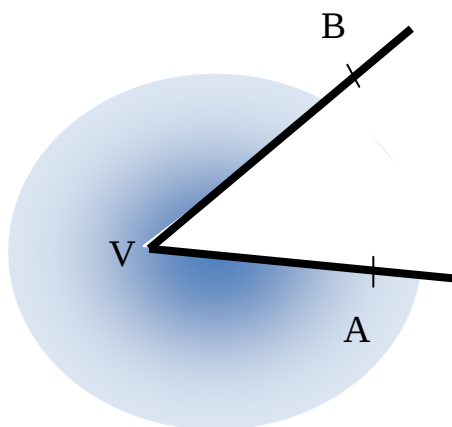


Úhel a jeho velikost

Úhel je část roviny, která je určena dvojicí polopřímek $\overrightarrow{VA}$, $\overrightarrow{VB}$. Tyto polopřímky nazýváme **ramena úhlu**, bod V je **vrcholem úhlu**. Dvojicí ramen jsou určeny vždy dva úhly v rovině. Pokud chceme určit úhel jednoznačně, označujeme jej jako **orientovaný úhel**, u kterého zadáme pořadí obou ramen ve směru proti hodinovým ručičkám.



Orientovaný úhel $\sphericalangle AVB$



Orientovaný úhel $\sphericalangle BVA$

Ramena náleží oběma úhlům. Každý bod roviny, který neleží na ramenech je vnitřním nebo vnějším bodem úhlu.

$\sphericalangle AVB$ je úhel **konvexní** – každá úsečka spojující dva body úhlu je částí úhlu

$\sphericalangle BVA$ je úhel **nekonvexní** (konkávní)

Pokud jsou $\overrightarrow{VA}$ a $\overrightarrow{VB}$ navzájem opačné polopřímky pak je úhel **přímý**.

Pokud jsou $\overrightarrow{VA}$ a $\overrightarrow{VB}$ splývající polopřímky, pak je úhel **nulový nebo plný**.

Velikost úhlu měříme v míře **stupňové** nebo **obloukové**.

Základními jednotkami je 1° a 1 radián. Menší jednotky jsou úhlová minuta a úhlová vteřina.

Radián je středový úhel příslušný k oblouku kružnice, jejíž poloměr je stejný jako délka oblouku. (1rad je přibližně 57°)

Úhel s velikostí menší než 90° nazýváme **ostrý**, úhel o velikosti 90° je **pravý** a konvexní úhel větší než 90° je úhel **tupý**.

Převod stupňů na radiány a naopak:

$$\pi = 180^\circ$$

$$1 \text{ rad} = \frac{180^\circ}{\pi} = 57^\circ$$

$$1^\circ = \frac{\pi}{180^\circ} = 0,0175 \text{ rad}$$

Je-li α úhel ve stupních a φ úhel v radiánech platí:

$$\varphi = \alpha \cdot \frac{\pi}{180^\circ}$$

$$\alpha = \varphi \cdot \frac{180^\circ}{\pi}$$

Příklad: $15^\circ = 15^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{\pi}{12} \text{ rad} = \frac{3,1416}{12} \text{ rad} = \mathbf{0,2618 \text{ rad}}$

$$\frac{3\pi}{4} \text{ rad} = \frac{3\pi}{4} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = \frac{3 \cdot 180^\circ}{4} = \mathbf{135^\circ}$$

Příklady k procvičení:

1. Velikosti úhlů ve stupních převed'te na radiány

a) 30°

b) 360°

c) 90°

d) 45°

e) 270°

f) 60°

g) 120°

h) 135°

2. Velikost úhlů vyjádřete ve stupních

a) π

b) 2π

c) $\frac{2\pi}{3}$

d) $\frac{3\pi}{2}$

e) $\frac{\pi}{6}$

f) $\frac{5\pi}{6}$

g) $\frac{\pi}{12}$

h) $\frac{5\pi}{12}$

3. Velikosti úhlů vyjádřete v radiánech:

0° 30° 45° 75° 90° 120° 150° 240° 330°

4. Velikosti úhlů vyjádřete ve stupních:

1,65806 3,05430 0,26175 1,40207 2,02371

95° 175° 15° 115°

5. Vyjádřete ve stupních a minutách:

$26,5^\circ$ $82,25^\circ$ $115,8^\circ$ $285,9^\circ$ $99,48^\circ$

2,3485 rad

1,6594 rad

$\frac{2\pi}{7}$

$\frac{3\pi}{5}$

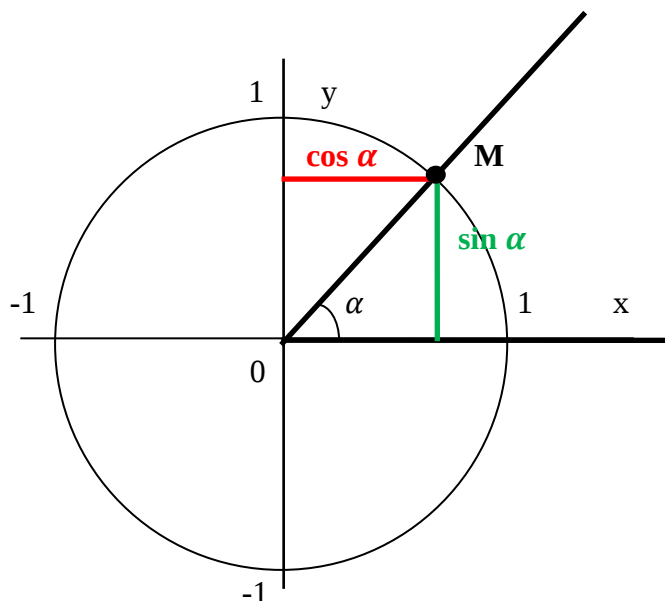
$134^\circ 34'$

$95^\circ 5'$

$51^\circ 26'$

$108^\circ 0'$

Goniometrické funkce

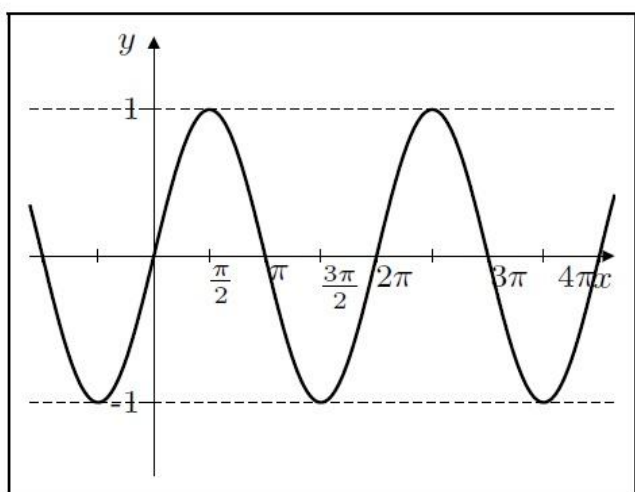


Na jednotkové kružnici je bod M průsečíkem ramene úhlu α a jednotkové kružnice. Souřadnice tohoto bodu na ose x je **kosinus α** a souřadnice na ose y je **sinus α** .

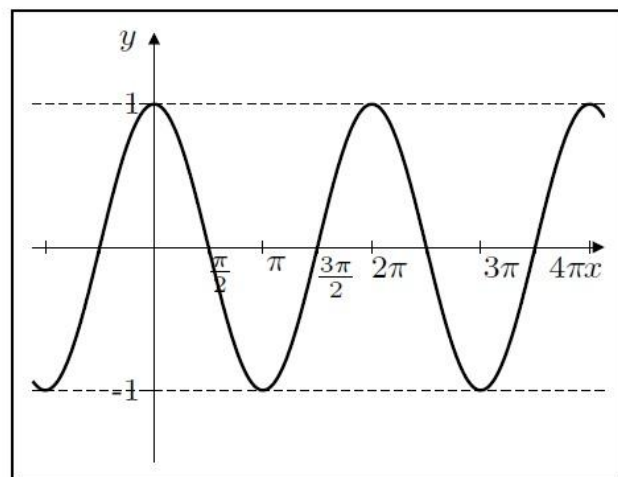
Definiční obor obou funkcí je $D = \mathbb{R}$, oborem hodnot je interval $H = \langle -1, 1 \rangle$.

Funkce sin a cos jsou periodické s periodou $2\pi \dots \dots 360^\circ$.

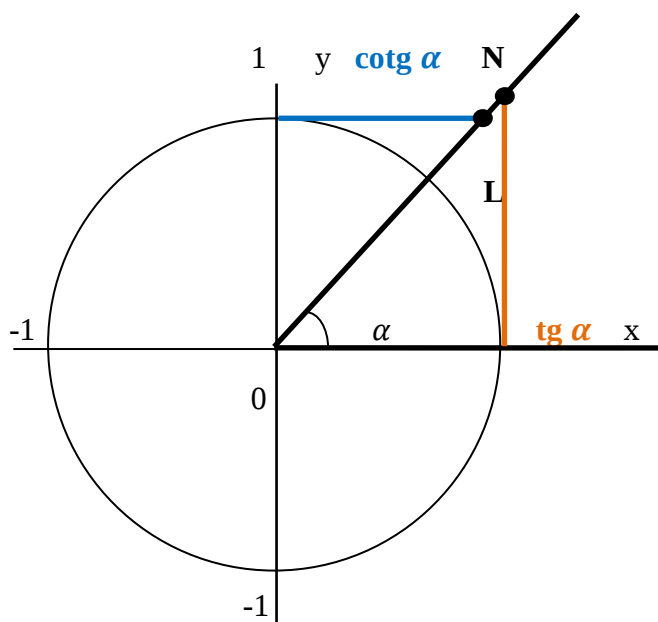
Grafy funkcí:



$$y = \sin x$$



$$y = \cos x$$



Na tečně jednotkové kružnice je bod N průsečíkem tečny a ramene úhlu α .
Souřadnice tohoto bodu na ose y je **tangens α** .

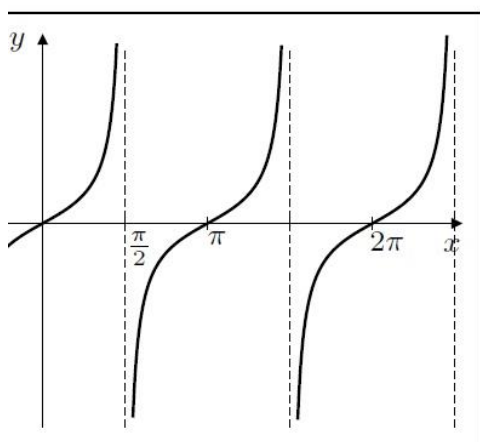
Na tečně jednotkové kružnice je bod L průsečíkem tečny a ramene úhlu α .
Souřadnice tohoto bodu na ose x je **kotangens α** .

Definiční obor funkce **tg** je $D = R - \left\{ (2k + 1) \frac{\pi}{2} \right\}$, oborem hodnot je $H = R$

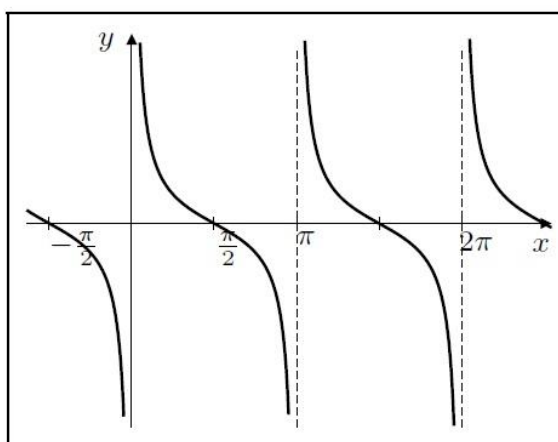
Definiční obor funkce **cotg** je $D = R - \{k\pi\}$, oborem hodnot je $H = R$

Funkce tg a cotg jsou periodické s periodou $\pi \dots \dots 180^\circ$.

Grafy funkcí:



$$y = \operatorname{tg} x$$



$$y = \operatorname{cotg} x$$

Významné hodnoty goniometrických funkcí:

x	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$tg x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	nedef.	0	nedef.	0
$cotg x$	nedef.	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	nedef.	0	nedef.

Příklady :

1. Určete, které hodnoty může nabývat daná funkce:

$$-2 ; 0 ; 3 ; \frac{\sqrt{2}}{3} ; -\sqrt{7} ; \pi ; -1 ; 0,258 \quad \begin{array}{ll} \text{a) sinus} & \text{b) kosinus} \\ \text{c) tangens} & \text{d) kotangens} \end{array}$$

2. Vypočtěte s využitím tabulky hodnotu výrazu:

$$\text{a) } \sin 60^\circ \cdot \cos 60^\circ \quad \text{b) } tg 30^\circ \cdot cotg 30^\circ$$

$$\text{c) } \sin \frac{\pi}{6} + \sin \frac{\pi}{3} \quad \text{d) } \sin \frac{\pi}{4} - \cos \frac{\pi}{4} + tg \frac{\pi}{4}$$

$$\text{e) } 2 \cdot tg \frac{\pi}{3} - \sqrt{cotg \frac{\pi}{4}} \quad \text{f) } \frac{\sin \frac{\pi}{3} - \cos \frac{\pi}{3}}{\sin \frac{\pi}{4} \cdot \cos \frac{\pi}{4}}$$

$$\text{g) } \left(\sin \frac{\pi}{6} - \cos \frac{\pi}{3} \right) \cdot \cos \frac{\pi}{3} \quad \text{h) } \left(tg \frac{\pi}{4} - cotg \frac{\pi}{6} \right)^2$$

3. Vyjádřete velikost úhlů pomocí základního úhlu $0 - 2\pi$ resp. $0^\circ - 360^\circ$

$$\text{a) } 450^\circ , 780^\circ , 960^\circ , 1560^\circ$$

$$\text{b) } -120^\circ , -780^\circ , -560^\circ , -800^\circ$$

$$\text{c) } \frac{7}{3}\pi , \frac{19}{4}\pi , \frac{17}{6}\pi , -\frac{11}{2}\pi , -\frac{49}{6}\pi , \frac{23}{4}\pi$$

4. Užitím periodičnosti funkcí zjednodušte:

a) $\cos 1125^\circ$

b) $\cot g 960^\circ$

c) $\sin \frac{17}{4}\pi$

d) $\operatorname{tg} 780^\circ$

e) $\cos \frac{7}{3}\pi$

f) $\sin 1500^\circ$

g) $\cot g \frac{29}{4}\pi$

h) $\operatorname{tg} \frac{4\pi}{3}$

Další vlastnosti goniometrických funkcí:

- Funkce **sin, tg, cotg** jsou **liché**:
 $\sin(-x) = -\sin(x)$
 $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg}(x)$
 $\cot g(-x) = -\cot g(x)$
-
-
-
- Funkce **cos** je **sudá**: platí $\cos(-x) = \cos(x)$

5. Užitím vlastností funkcí upravte a vyčíslete:

a) $\cos(-750^\circ)$

b) $\sin(-1110^\circ)$

c) $\operatorname{tg}(-225^\circ)$

d) $\sin(-1470^\circ)$

e) $\cot g(-570^\circ)$

f) $\sin\left(-\frac{9}{4}\pi\right)$

g) $\cot g\left(-\frac{1}{2}\pi\right)$

h) $\cos\left(-\frac{13}{4}\pi\right)$

i) $\operatorname{tg}\left(-\frac{19}{6}\pi\right)$

6. Vypočtěte:

a) $\frac{1}{3}\operatorname{tg}\frac{\pi}{6} \cdot \cot g 30^\circ - 5\sin 270^\circ + \frac{2}{3}\cos 450^\circ + 2\cos \pi$

b) $2\operatorname{tg} 540^\circ - \sqrt{3} \cdot (-\cos 30^\circ) + \sin^2 60^\circ - \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{3} - \sin \pi$

c) $\sin 30^\circ \cdot \cos 30^\circ - \sqrt{2}\sin 45^\circ + \operatorname{tg}(-60^\circ) - 6\cos 720^\circ$

d) $3(\cos 45^\circ)^2 - (\sin 60^\circ + \operatorname{tg} 30^\circ)^2 - 2\cos \frac{\pi}{2} + \sin 2\pi$

Příklady k domácí přípravě

1. Velikosti úhlů vyjádřete v radiánech a) pomocí zlomku a π

b) na 4 desetinná místa

$$40^{\circ} \quad 72^{\circ} \quad 135^{\circ} \quad 210^{\circ}$$

2. Velikosti úhlů vyjádřete ve stupních

$$\frac{3}{4}\pi \quad \frac{5}{6}\pi \quad 2,0944 \text{ rad} \quad 0,6981 \text{ rad}$$

3. Vyjádřete pomocí úhlu o hodnotě $0^{\circ} - 360^{\circ}$

$$415^{\circ} \quad 875^{\circ} \quad -175^{\circ} \quad -430^{\circ}$$

4. Vyjádřete pomocí úhlu o hodnotě $0 - 2\pi$

$$\frac{9}{2}\pi, \quad \frac{14}{3}\pi, \quad -\frac{11}{4}\pi, \quad -\frac{5}{6}\pi$$

5. Pomocí tabulky najděte hodnoty goniometrických funkcí

$$\sin 390^{\circ} \quad \cos 765^{\circ} \quad \sin(-270^{\circ}) \quad \operatorname{tg} 1140^{\circ}$$

$$\operatorname{cotg} \frac{9}{4}\pi \quad \cos \frac{5}{6}\pi \quad \operatorname{tg}(-\pi) \quad \operatorname{cotg} 5\pi$$

6. Vypočtěte hodnotu výrazu :

$$3\cos 900^{\circ} + 4 \cdot \sin^2\left(\frac{5}{4}\pi\right) + \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{3} - \operatorname{cotg} 225^{\circ}$$

Znaménka goniometrických funkcí

Kvadrant:	I. ($0^\circ - 90^\circ$)	II. ($90^\circ - 180^\circ$)	III. ($180^\circ - 270^\circ$)	IV. ($270^\circ - 360^\circ$)
$\sin x$	+	+	-	-
$\cos x$	+	-	-	+
$\operatorname{tg} x$	+	-	+	-
$\operatorname{cotg} x$	+	-	+	-

S využitím znalosti znaménka funkcí a tabulky velikostí goniometrických funkcí v I. kvadrantu lze výhodně určit velikosti goniometrických funkcí úhlů.

Pro lepší představu je vhodné rozmyslet situaci na jednotkové kružnici.

7. S využitím vlastností goniometrických funkcí určete:

a) $\sin 240^\circ$ b) $\cos 300^\circ$ c) $\operatorname{tg} 150^\circ$ d) $\operatorname{cotg} 135^\circ$

e) $\cos \frac{5}{4}\pi$ f) $\sin 150^\circ$ g) $\operatorname{cotg} \frac{2\pi}{3}$ h) $\operatorname{tg} 315^\circ$

8. Určete:

a) $\cos(-135^\circ)$ b) $\sin\left(-\frac{4}{3}\pi\right)$ c) $\operatorname{tg}(-225^\circ)$ d) $\operatorname{cotg}\left(-\frac{5\pi}{3}\right)$

e) $\sin(-330^\circ)$ f) $\cos(-240^\circ)$ g) $\operatorname{cotg}(-120^\circ)$ h) $\operatorname{tg}(-150^\circ)$

9. Určete všechny hodnoty úhlů pro které platí:

a) $\cos x = \frac{1}{2}$ b) $\sin x = -1$ c) $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$ d) $\operatorname{cotg} x = 0$

e) $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ f) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ g) $\operatorname{cotg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ h) $\operatorname{tg} x = -1$