

Matematická funkce

Kartézský součin

Uspořádanou dvojici prvků x, y označujeme $[x, y]$

Uspořádané dvojice jsou si rovny, pokud platí:

$$[x, y] = [u, v] \Leftrightarrow x = u \wedge y = v$$

Pokud K, L jsou libovolné množiny, pak **množinu všech uspořádaných dvojic** $[x, y]$ kde $x \in K, y \in L$ nazýváme **kartézský součin** množin K, L a označujeme jej $K \times L$. $K \times L = \{[x, y], x \in K \wedge y \in L\}$

Pokud platí $K = L$ nazýváme kartézský součin $K \times K$ **kartézskou mocninou** a zapisujeme K^2 .

Binární relací z množiny K do množiny L nazýváme každou podmnožinu U kartézského součinu $K \times L$.

Zobrazení

Relace U z množiny K do množiny L se nazývá **zobrazení** z K do L právě tehdy, když ke každému $x \in K$ existuje **nejvýše jedno** $y \in L$.

Funkce

Reálnou funkcí reálné proměnné je zobrazení f , které **každému** $x \in D$ přiřadí **právě jedno** $y \in H$. Množiny D, H jsou podmnožinami množiny reálných čísel, množinu D nazýváme **definiční obor** a H je **obor hodnot** funkce f . Prvky množiny D jsou nezávisle proměnné, prvky množiny H jsou závisle proměnné.

Uspořádané dvojice $[x, y]$ zapisujeme také ve tvaru $y = f(x)$

Možnosti zadání funkcí:

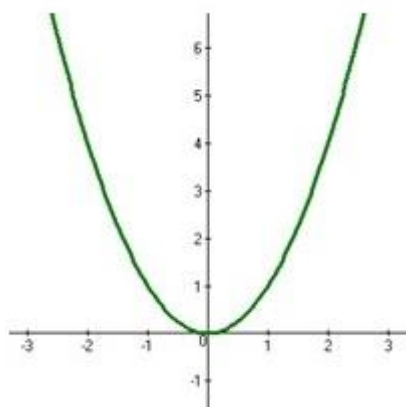
1. Pomocí rovnice (předpisu)

$$f: y = x^2 - 1, x \in \langle 0, 2 \rangle$$

2. Pomocí tabulky (výpisu hodnot)

x	0	1	2	3
$f(x) = x^2 - 1$	-1	0	3	8

3. Pomocí grafu:



4. Pomocí slovního zadání.

1. Zakroužkujte pravdivé tvrzení.

- a) Funkce je předpis, který každému prvku x z definičního oboru přiřazuje jedno až dvě reálná čísla y z oboru hodnot.
- b) Funkce nemůže být zadána slovním popisem.
- c) Funkce je předpis, který každému prvku x z definičního oboru přiřazuje právě jedno reálné číslo y z oboru hodnot.
- d) Obor hodnot je množina všech funkčních hodnot, kterých funkce nabývá.
- e) V předpisu funkce $f: y = \frac{x+3}{x-4}$ je y nezávisle proměnná a x závisle proměnná.
- f) Funkce nemůže být zadána grafem.
- g) Definiční obor je množina všech hodnot proměnné x , kterým je přiřazena funkční hodnota y .
- h) Funkce může být zadána tabulkou s výčtem prvků.
- i) Dvě funkce f a g se sobě rovnají, právě když mají shodné definiční obory tzn. $D(f) = D(g)$.
- j) Zápisy $f(-3) = 5$ a $f(5) = -3$ vyjadřují totéž.

2. Rozhodněte, zda jsou následujícími tabulkami zadány funkce.

a)

x	1	-2	-1	2	0
y	0	3	-3	4	0

b)

x	0	-3	5	-3	4
y	2	$\sqrt{2}$	0	2	1

3. U funkce f zadané tabulkou určete definiční obor a obor hodnot.

x	2	3	4	5	6
y	1	4	7	1	4

$$D(f) =$$

$$H(f) =$$

4. Funkce f je zadaná tabulkou

x	-2	-1	0	2	5
y	3	0	-3	-9	-18

a) Určete definiční obor funkce: $D(f) =$

b) Určete obor hodnot funkce: $H(f) =$

c) Doplňte chybějící čísla v následujících zápisech:

$$f(0) = \quad f(\quad) = -9 \quad f(-1) = \quad f(\quad) = 3$$

5. Vypočítejte funkční hodnoty v bodech 2 ; -1 ; $\frac{1}{12}$; $-0,15$

Pro funkci f zadanou předpisem $f: y = 2 - 3x$

6. Určete definiční obor následujících funkcí zadaných předpisy.

a) $f: y = \frac{x+3}{x-2}$

b) $f: y = \frac{x+4}{2}$

c) $f: y = \sqrt{-3 + 7x}$

d) $f: y = \sqrt{5 - 6x}$

$$\text{e) } f: y = \frac{1}{\sqrt{3x+2}}$$

$$\text{f) } f: y = \frac{\sqrt{x-4}}{\sqrt{2x-9}}$$

$$\text{g) } f: y = \sqrt{\frac{x+4}{x-4}}$$

$$\text{h) } f: y = \sqrt{x^2 + 2x - 3}$$

7. Vypočítejte, pro které hodnoty proměnné x nabývají funkce dané funkční hodnoty. Nezapomeňte určit, pro která čísla mají dané funkce smysl.

$$\text{a) } f: y = x + 4; \quad f(x) = -1$$

$$\text{b) } f: y = 3x^2 - 4x + 0,5; \quad f(x) = \frac{1}{2}$$

$$\text{c) } f: y = \frac{x+3}{x-4}; \quad f(x) = 3$$

$$\text{d) } f: y = \frac{x^2-5x+6}{x+4}; \quad f(x) = 0$$

8. Rozhodněte, zda jsou si funkce $f: y = 1$ a $g: y = \frac{x+1}{x+1}$ rovny.

9. Doplňte do tabulky čísla 1; 5; 6 tak, aby představovala zadání funkce

x	2	4		$\sqrt{4}$	$\frac{8}{2}$
y	5	1	3		

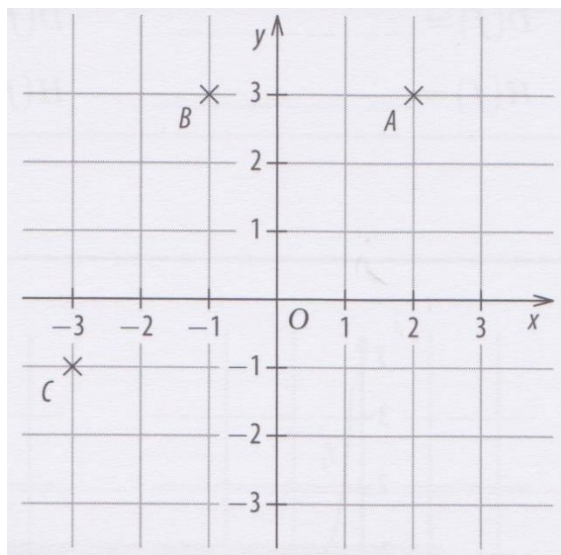
Grafy funkcí PS 9-12

Grafy funkcí lze modelovat pomocí programu GEOGEBRA

1. Zakroužkujte pravdivá tvrzení

- a) Uspořádanou dvojici čísel $x; y$ zapisujeme do kulatých závorek $(x ; y)$.
- b) Kartézská souřadná soustava souřadnic Oxy je tvořena dvěma navzájem kolmými číselnými osami, díly na osách nemusí mít stejnou délku.
- c) Daná množina bodů je grafem funkce, jestliže každá pomocná přímka rovnoběžná s osou y protne množinu nejvýše v jednom bodě.
- d) Každý bod v rovině je jednoznačně určen uspořádanou dvojicí čísel.
- e) Všechny průsečíky grafu funkce s osou x mají x -ovou souřadnici **0**.

2. V kartézské soustavě souřadnic jsou dány body A, B, C .



a) určete souřadnice

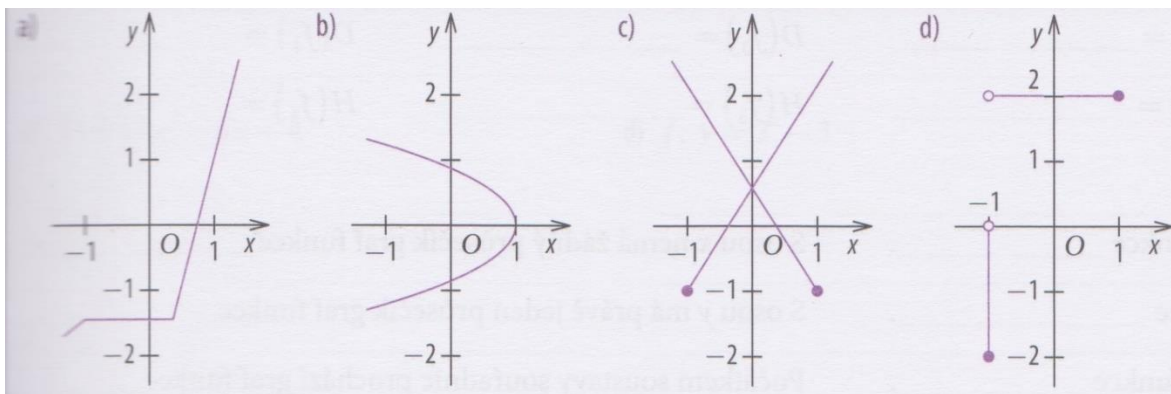
$A[\quad ; \quad], \quad B[\quad ; \quad], \quad C[\quad ; \quad]$

b) zakreslete body

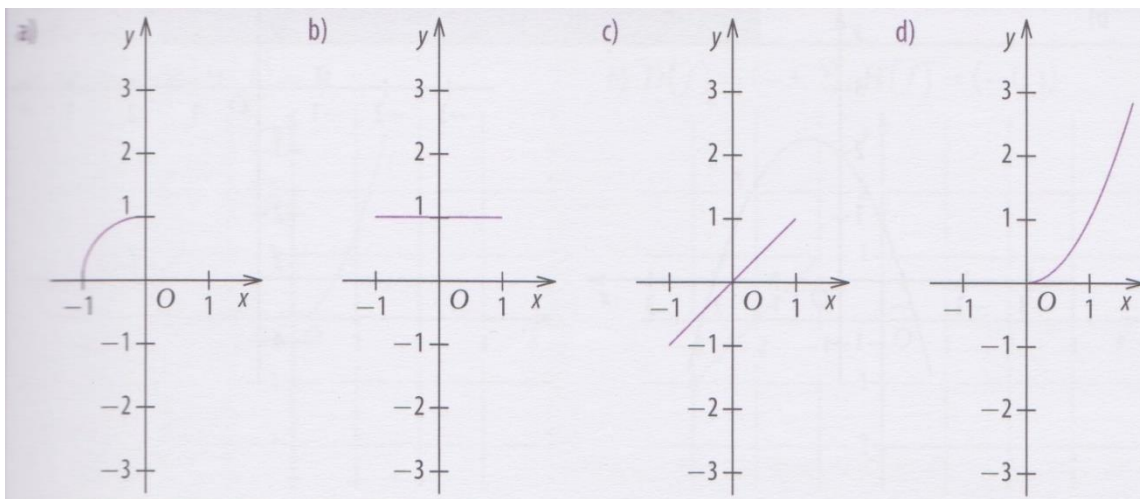
$D[-2; 3], E[2; -3], F[-2; -3]$

$G[-1; 0], H[2; 0]$

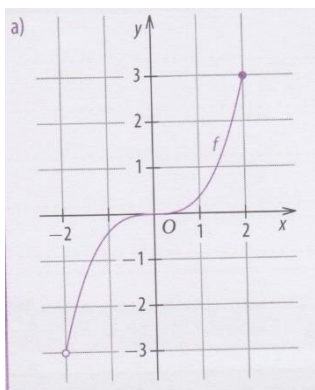
3. Vyberte z nakreslených množin bodů ty, které **jsou** grafem funkce



4. Doplňte obrázky tak, aby zakreslená množina **nebyla** grafem funkce

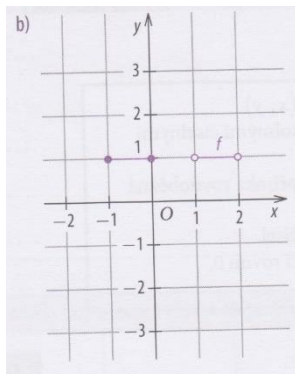


5. Určete definiční obor a obor hodnot funkcí zadaných grafy



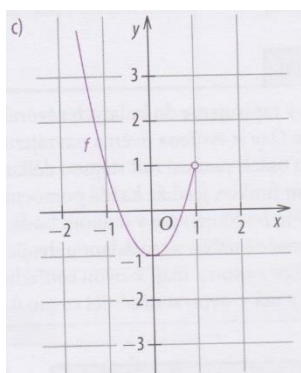
$$D(f) =$$

$$H(f) =$$



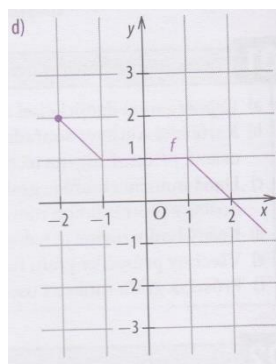
$$D(f) =$$

$$H(f) =$$



$$D(f) =$$

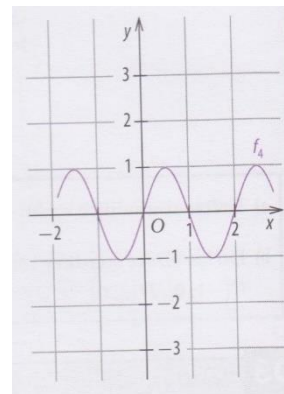
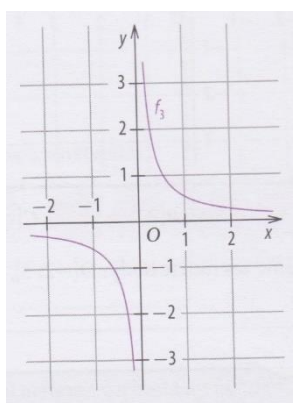
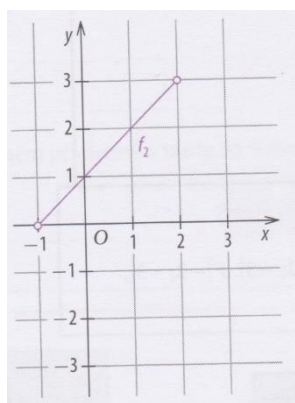
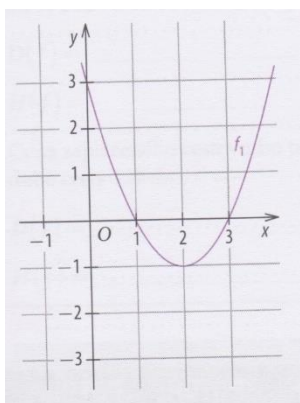
$$H(f) =$$



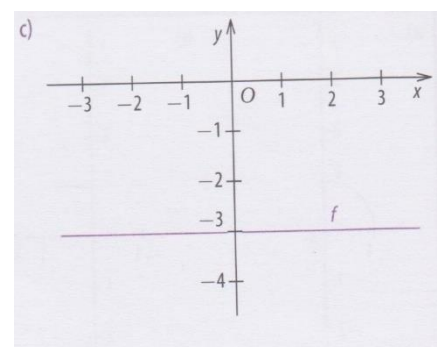
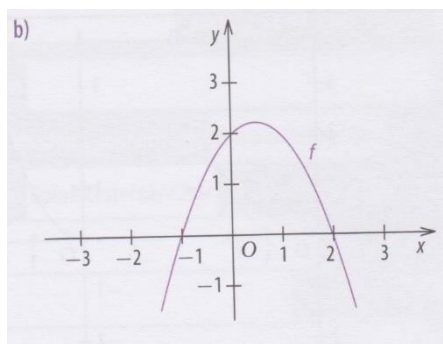
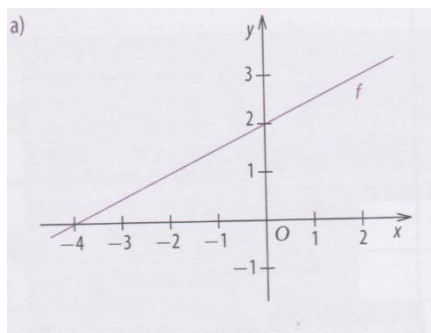
$$D(f) =$$

$$H(f) =$$

6. Jsou dány funkce f_1, f_2, f_3 , a f_4 . Určete definiční obor a obor hodnot funkcí.



7. Zapište souřadnice průsečíků grafů jednotlivých funkcí se souřadnicovými osami x a y .



8. Vypočítejte průsečíky grafu funkce se souřadnicovými osami x a y .

a) $f: y = x + 3; D(f) = R$

b) $f: y = 12; D(f) = R$

c) $f: y = x^2 + 4x - 5; D(f) = R$

d) $f: y = x^2 + x - 2; D(f) = \langle 0; \infty \rangle$

9. Rozhodněte, zda body $A[3; 4]$, $B[-2; 0]$, $C[0; -2]$ a $D[-2; -1]$ náležejí grafu funkce dané předpisem.

a) $f: y = x + 1$

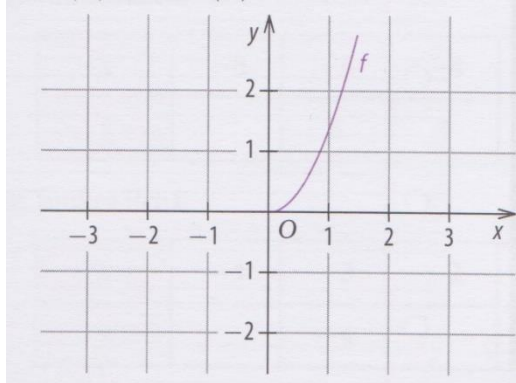
b) $f: y = -x - 3$

c) $f: y = x^2 - 3x + 4$

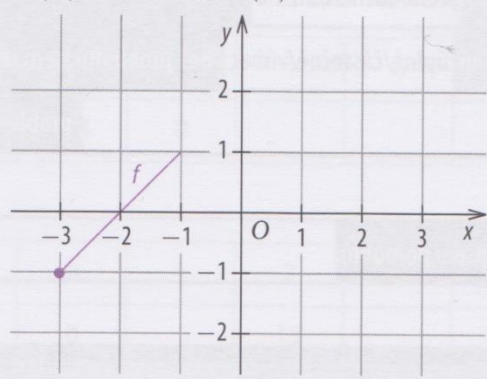
d) $f: y = 2^x - 3$

10. Doplňte grafy funkcí tak, aby byly splněny podmínky pro definiční obor a obor hodnot funkce.

a) $D(f) = \mathbf{R}; H(f) = \mathbf{R}$

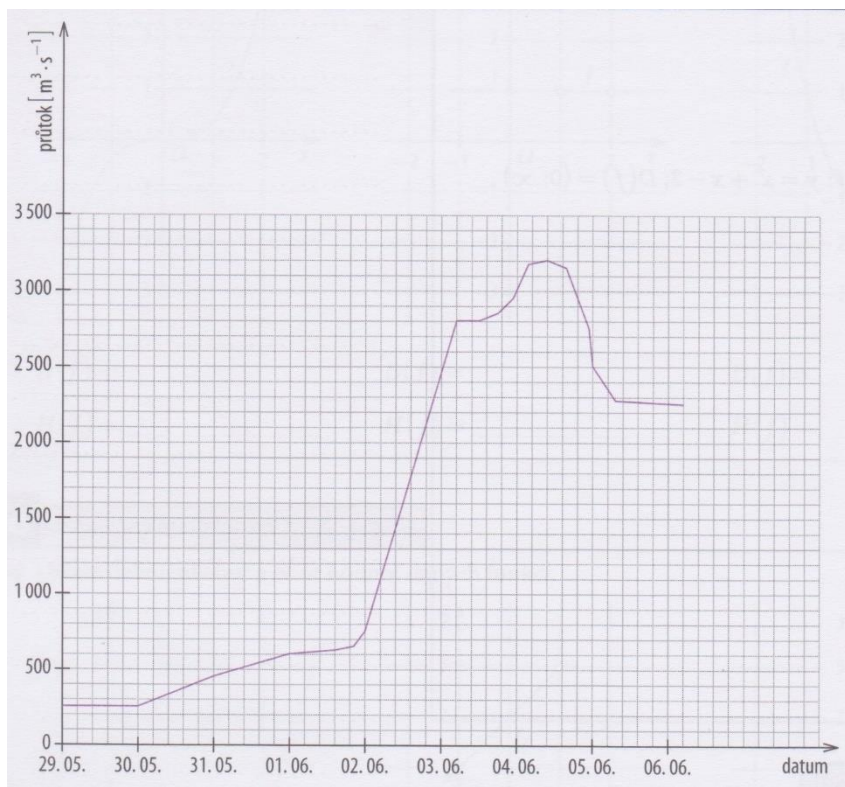


b) $D(f) = \langle -3; 2 \rangle; H(f) = \langle -1; 1 \rangle$



11. Na obrázku je průtok vody řeky Vltavy v období povodní roku 2013.

(1. SPA – $498 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$, 2. SPA – $1000 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$, 3. SPA – $1500 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$, stav ohrožení při průtoku $3\,449 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$. Zaznačte hraniční hodnoty.



a) Který den byl vyhlášen

2. SPA?

b) Bylo třeba vyhlásit stav ohrožení?

c) Který den nastal největší nárůst průtoku?

d) Jakého maxima dosáhl průtok na Vltavě?

e) Který den začala voda v řece opadávat?

Základní vlastnosti funkcí

1. Funkce f se nazývá **sudá funkce**, právě když zároveň platí:

- pro každé $x \in D(f)$ je také $-x \in D(f)$
- pro každé $x \in D(f)$ je $f(-x) = f(x)$

(graf je souměrný podle osy y)

2. Funkce f se nazývá **lichá funkce**, právě když zároveň platí:

- pro každé $x \in D(f)$ je také $-x \in D(f)$
- pro každé $x \in D(f)$ je $f(-x) = -f(x)$

(graf je souměrný podle počátku)

3. Funkci f nazveme **rostoucí** v množině $M, M \subset D$, pokud pro každé dva prvky x_1, x_2 z množiny M platí: je-li $x_1 < x_2$, pak $f(x_1) < f(x_2)$

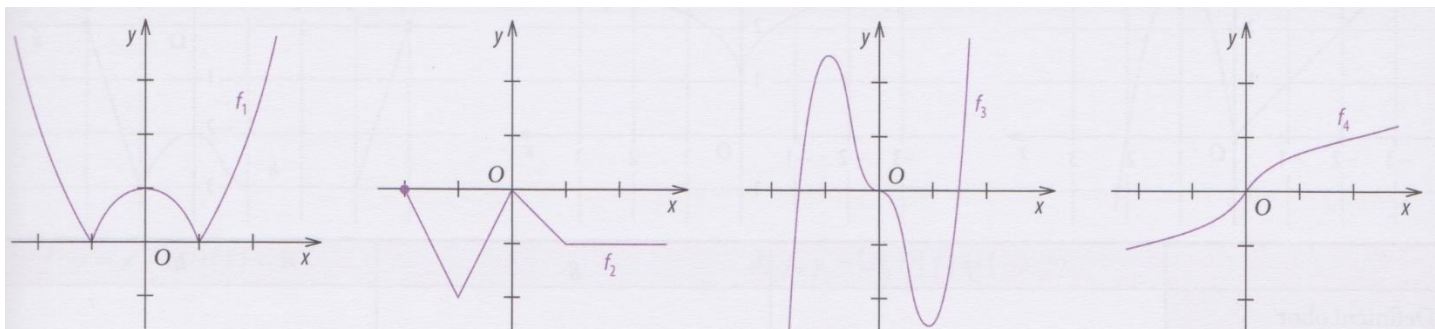
(pokud $M=D$ je funkce rostoucí,
nahradíme-li $<$ znaménkem $>$ funkce je neklesající)

4. Funkci f nazveme **klesající** v množině $M, M \subset D$, pokud pro každé dva prvky x_1, x_2 z množiny M platí: je-li $x_1 < x_2$, pak $f(x_1) > f(x_2)$

(pokud $M=D$ je funkce klesající,
nahradíme-li $>$ znaménkem $\geq$ funkce je nerostoucí)

5. Funkce f se nazývá **prostá**, pokud pro všechna $x_1, x_2 \in D(f)$ platí:
pokud $x_1 \neq x_2$ potom $f(x_1) \neq f(x_2)$

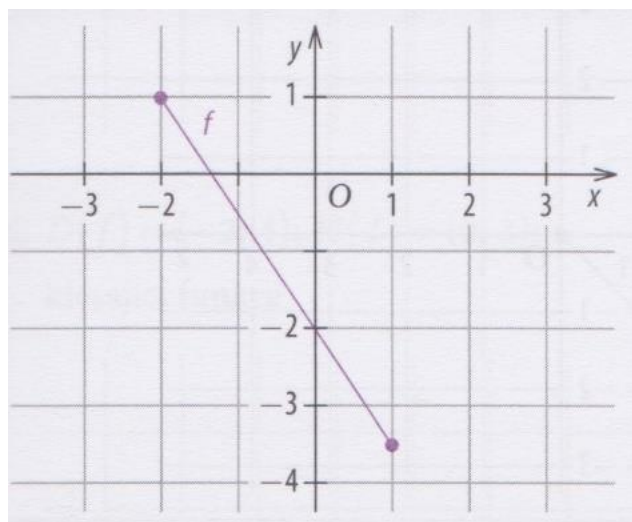
1. Zapište do tabulky, zda mají funkce zadané grafy dané vlastnosti na **celém definičním oboru**. Odpovídejte ANO / NE.



	Rostoucí	Klesající	Ryze monotónní	Prostá	Sudá	Lichá	Omezená	Omezená shora	Omezená zdola	Maximum	Minimum
f_1											
f_2											
f_3											
f_4											

2. Výběrem vytvořte pravdivá tvrzení, nehodící se škrtněte.
- Jestliže hodnoty proměnné x u klesající funkce rostou, pak hodnoty proměnné y klesají / rostou
 - Pokud funkce v daném bodě definičního oboru nabývá nejvyšší funkční hodnoty, pak má v tomto bodě maximum / minimum
 - Jestliže existuje alespoň jedno číslo, které je menší nebo rovno všem hodnotám funkce f , pak je funkce shora / zdola omezená
 - Pokud je graf funkce souměrný podle osy y , je tato funkce sudá / lichá
 - Funkce f je prostá, právě když pro každé dvě různé hodnoty proměnné x platí, že jsou jejich funkční hodnoty různé / stejné

3. Rozhodněte, zda jsou tvrzení o grafu funkce pravdivá. Na obrázku je:



- a) rostoucí funkce
- b) funkce klesající na intervalu $\langle -2; 1 \rangle$
- c) konstantní funkce
- d) ryze monotónní funkce
- e) prostá funkce
- f) shora omezená funkce
- g) zdola omezená funkce
- h) omezená funkce
- i) maximum je v bodě $x = 1$
- j) minimum je v bodě $x = -3,5$

4. Doplňte tabulky tak, aby funkce zadané těmito tabulkami měly danou vlastnost.

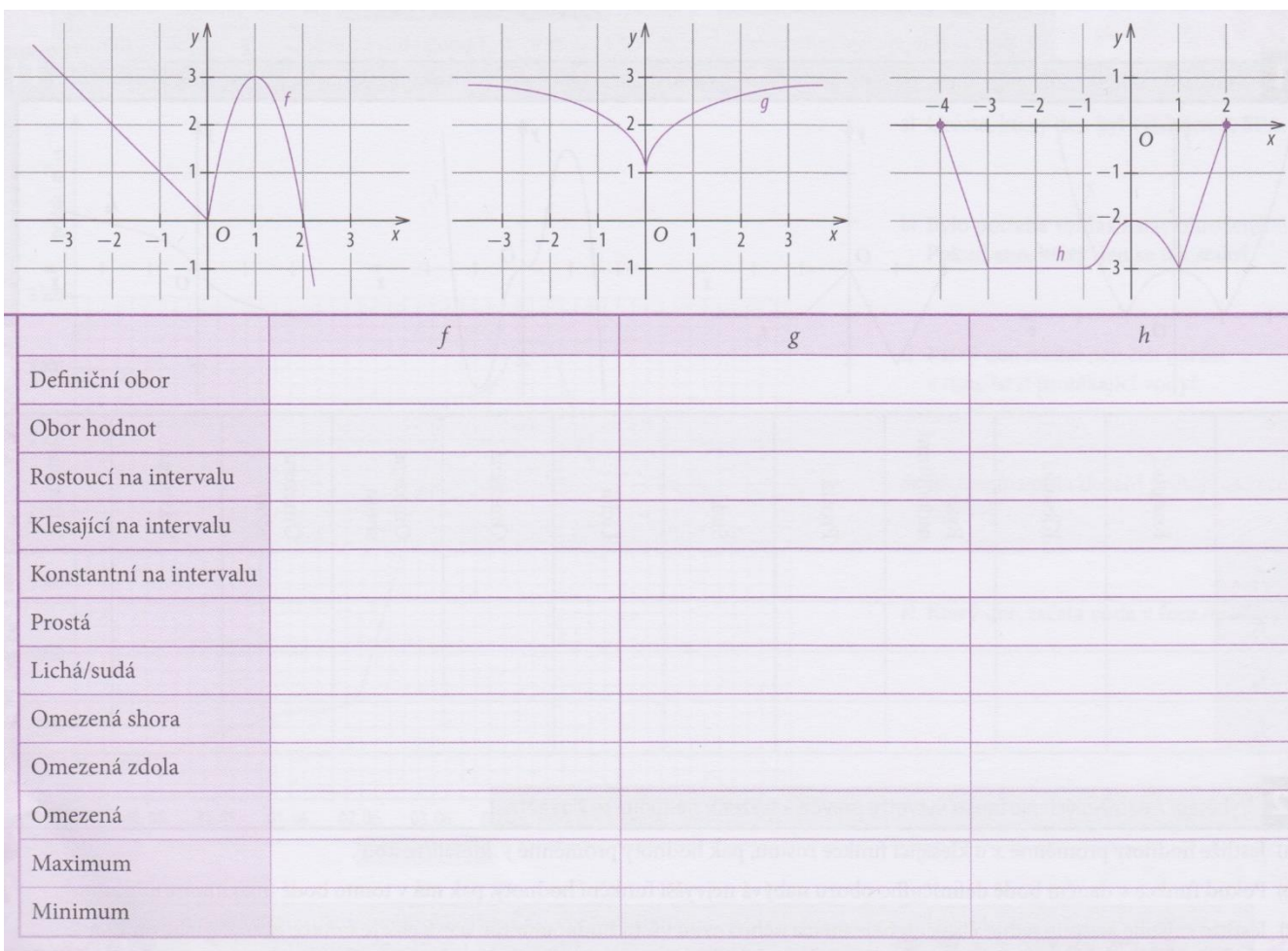
a) funkce sudá

x	-8	-6	-4	-2	0	2	4	6	8
y		8	4		-4	0			12

b) funkce lichá

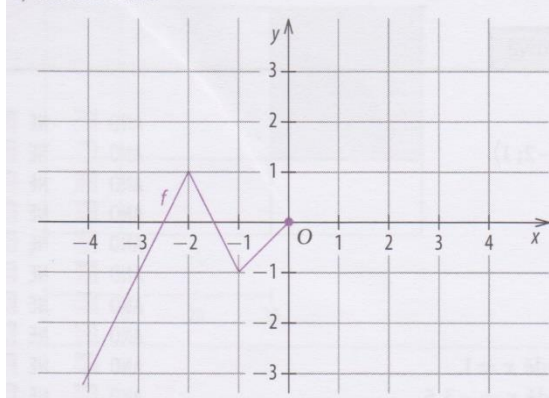
x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y		-4		-10	0		17		80

5. Určete vlastnosti funkcí zadaných grafy.

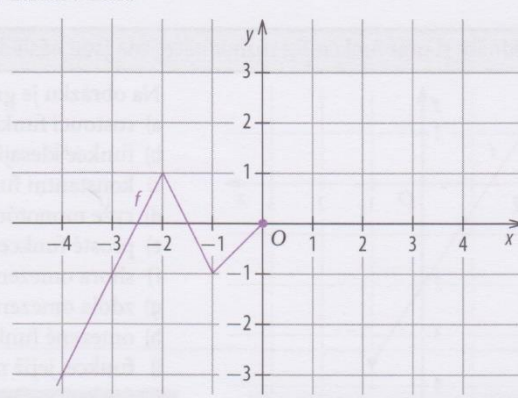


6. Doplňte grafy funkcí tak, aby měly danou vlastnost.

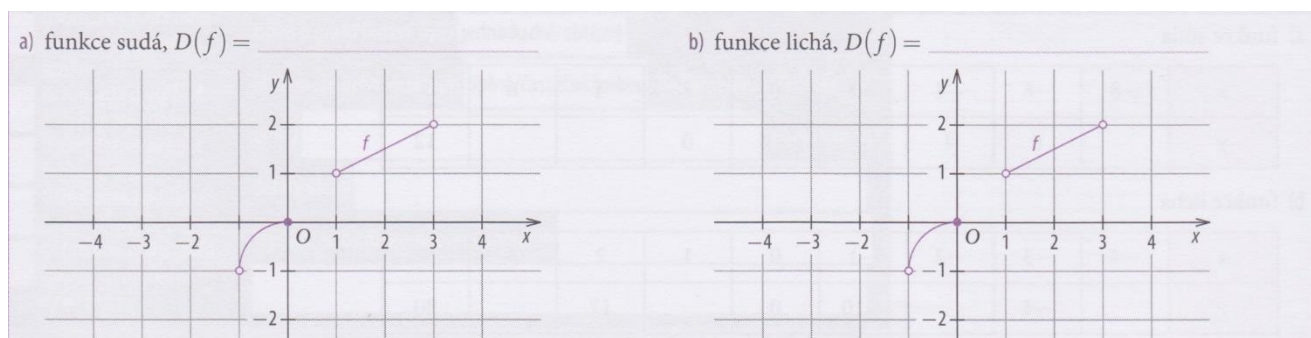
a) funkce sudá



b) funkce lichá



7. Doplňte grafy funkcí tak, aby mělo danou vlastnost, a určete definiční obor.



8. Určete, zda jsou funkce sudé, liché, nebo nemají žádnou z těchto vlastností.

a) $f: y = x^4; D(f) = \mathbb{R}$

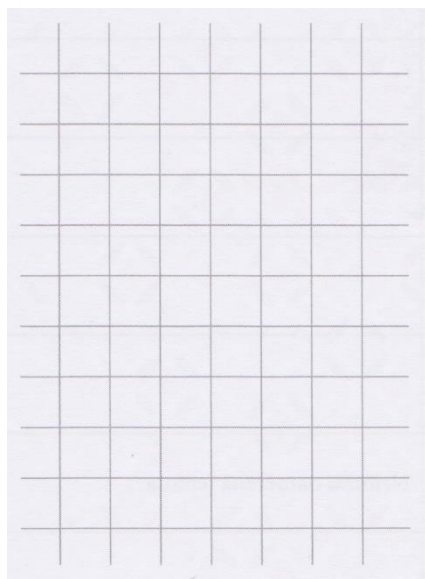
b) $f: y = \frac{4x}{x^2-4}; D(f) = \mathbb{R} - \{-2; 2\}$

c) $f: y = x - 1; D(f) = \mathbb{R}$

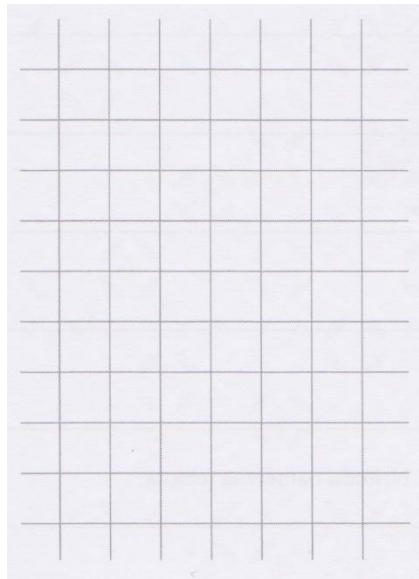
d) $f: y = |x|; D(f) = \langle -2; 5 \rangle$

9. Načrtněte grafy funkcí podle daných požadavků.

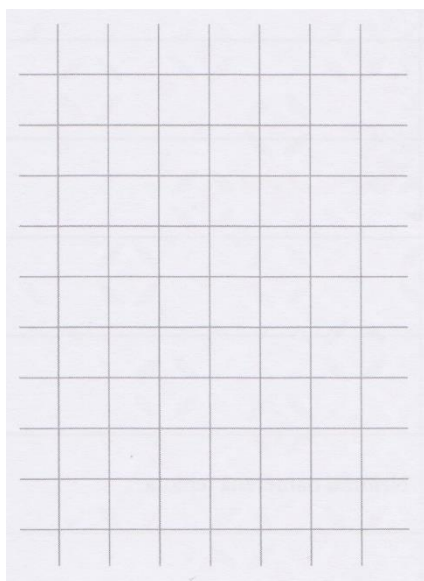
a) $D(f) = (-5; 5)$



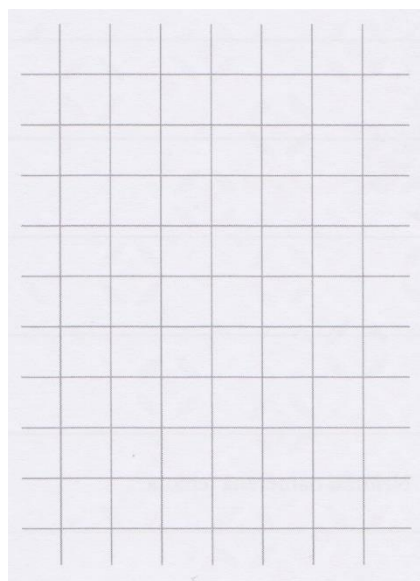
b) $H(f) = (-\infty; 3)$



c) $D(f) = \langle -3; 3 \rangle$; *rostoucí f.*

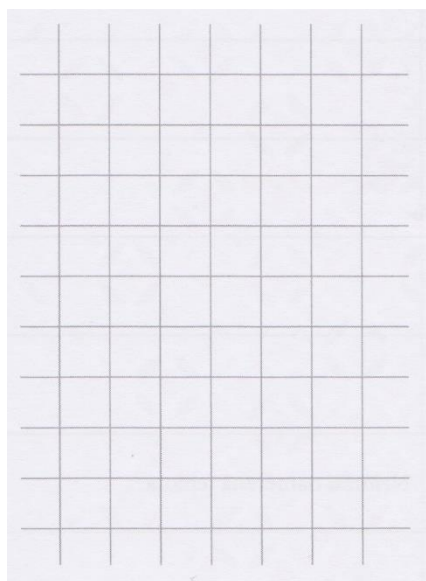


d) $D(f) = (-2; 4)$; $H(f) = (0; 3)$ *kl. f*



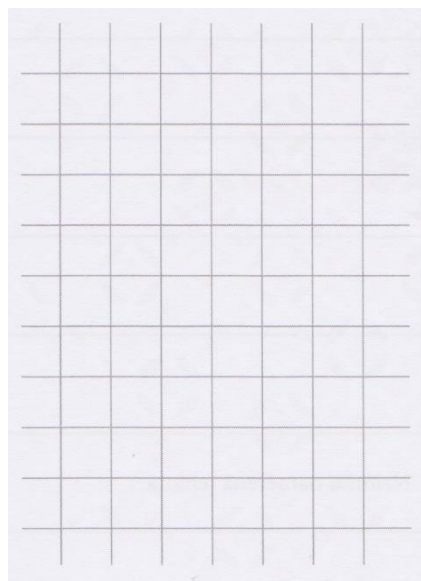
e) $D(f) = \mathbb{R}; H(f) = (-\infty; 3)$

shora omezená funkce

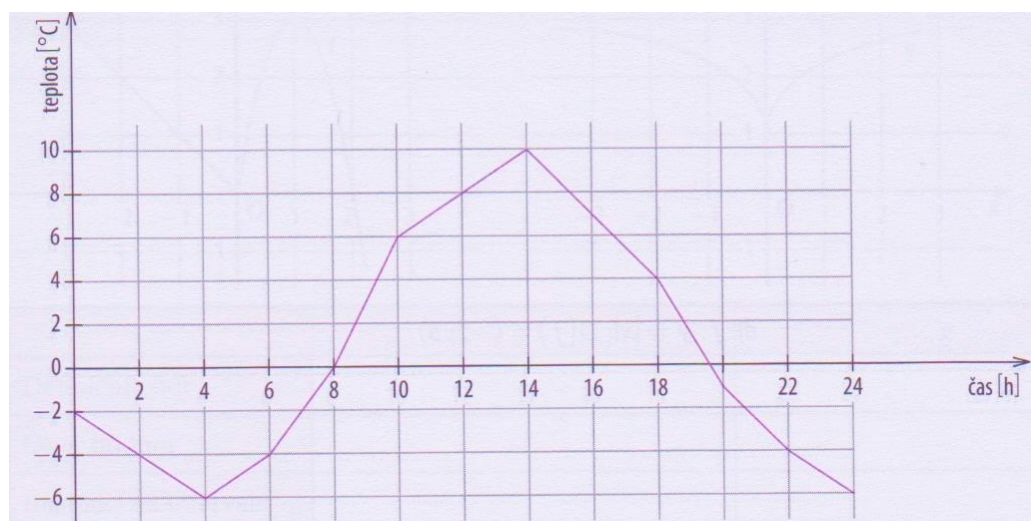


f) $D(f) = (-\infty; 3); H(f) = \langle 2; \infty)$

zdola omezená funkce



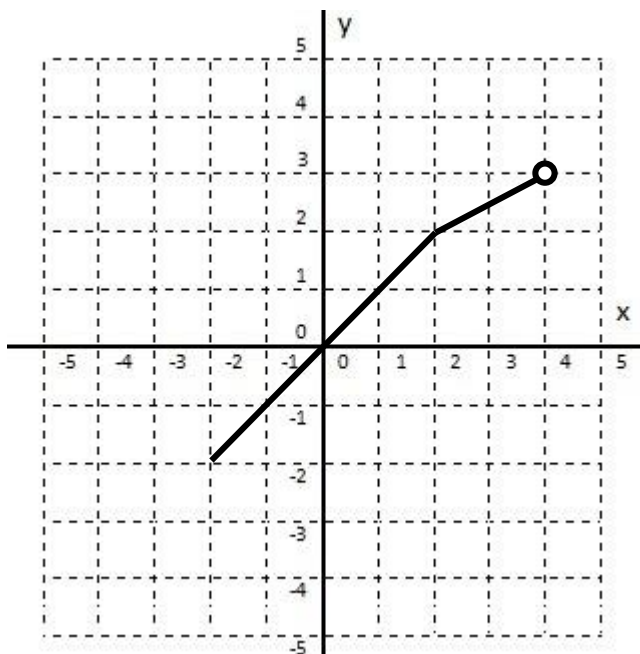
10. Na obrázku jsou graficky znázorněny výsledky měření teploty. Doplňte tabulku.



Definiční obor	$\langle 0; 24 \rangle$	Doba, po kterou byla teplota měřena a zaznamenávána.
Obor hodnot		
Rostoucí na intervalu		
Klesající na intervalu		
Konstantní na intervalu		
Omezená shora		
Omezená zdola		Nejnižší naměřená teplota.
Omezená		
Maximum v bodě	$x = 14$	
Minimum v bodě		

Příklady k domácí přípravě

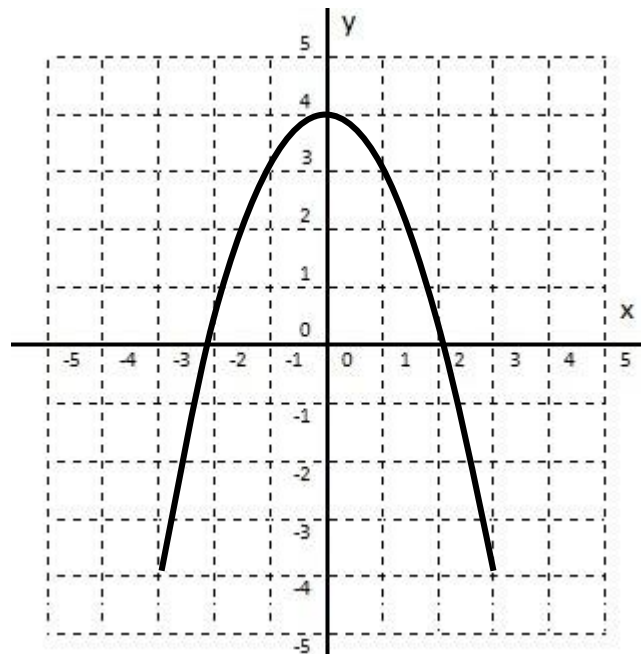
1. Zapište definiční obor a obor hodnot funkcí na grafech, zakřížkujte jejich vlastnosti:



$D =$

$H =$

S	L	R	K	P
---	---	---	---	---



$D =$

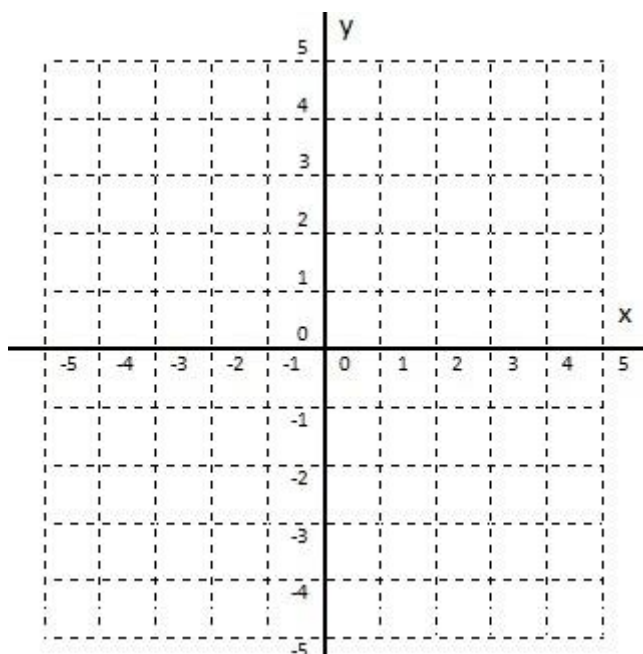
$H =$

S	L	R	K	P
---	---	---	---	---

2. Načrtněte grafy (sestavte si tab.), určete obory hodnot a zakřížkujte vlastnosti funkcí:

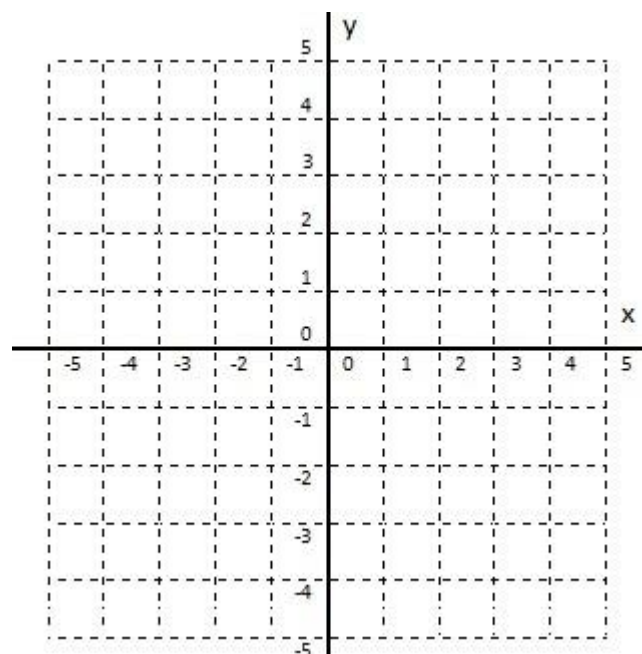
$$y = -2x + 1 \quad D = (-2; 3)$$

$$y = |x + 1| \quad D = \{-4; -1; 0; 1; 4\}$$



$H =$

S	L	R	K	P
---	---	---	---	---



$H =$

S	L	R	K	P
---	---	---	---	---

x					
y					

x					
y					

