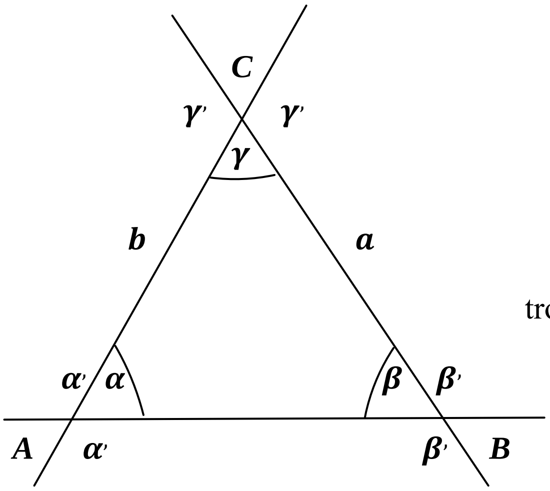
Trojúhelník

Trojúhelník - ΔABC určují tři body A, B, C, které neleží na jedné přímce. Trojúhelník je rovněž možno považovat za průnik tří polorovin nebo tří konvexních úhlů.



Body A, B, C, se nazývají **vrcholy trojúhelníku**

Úsečky AB, BC, AC, jsou **strany trojúhelníku**

Konvexní úhly BAC, ABC, BCA jsou **vnitřní úhly** trojúhelníku, **vedlejší** úhly k těmto úhlům jsou **vnější úhly**

<u>Rozdělení trojúhelníků podle stran:</u>

Různostranné – obecné	**Rovnoramenné**	**Rovnostranné**
žádné dvě strany nejsou shodné	dvě strany, ramena, jsou shodná třetí, základna, je různá	všechny strany jsou shodné

<u>Rozdělení trojúhelníků podle vnitřních úhlů:</u>

Ostroúhlé	**Pravoúhlé**	**Tupoúhlé**
všechny vnitřní úhly ostré	jeden vnitřní úhel pravý protější strana přepona, ostatní odvěsny	jeden vnitřní úhel je tupý

<u>Další vztahy platné v trojúhelníku:</u>

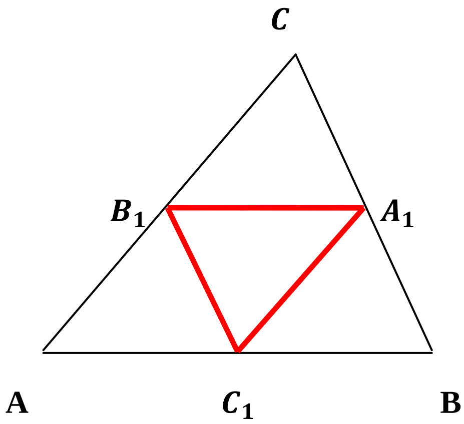
Součet vnitřních úhlů trojúhelníku je úhel přímý (180°)

Velikost vnějšího úhlu trojúhelníku je rovna součtu velikostí vnitřních úhlů při ostatních vrcholech.

Součet dvou stran je větší než strana třetí (trojúhelníková nerovnost)

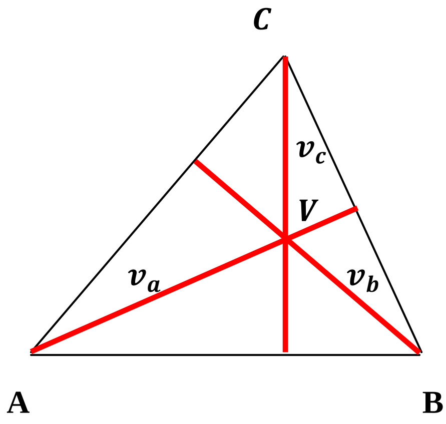
Proti větší straně leží větší vnitřní úhel a proti většímu vnitřnímu úhlu leží větší strana

Střední příčka



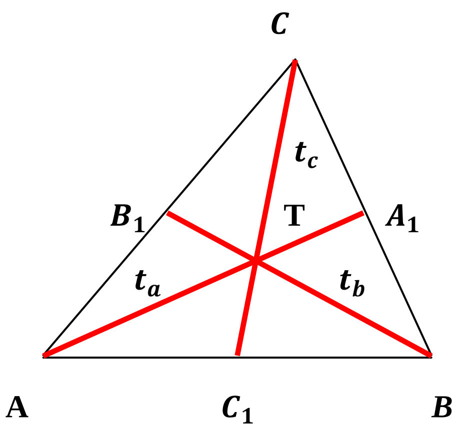
Střední příčka je úsečka spojující středy dvou stran. Je rovnoběžná se třetí stranou a její délka je polovinou délky strany.

Výška trojúhelníku



Výška je úsečka spojující vrchol trojúhelníku s patou kolmice vedené z protilehlé strany. Výšky se protínají ve společném průsečíku V nazývaném ortocentrum. V ostroúhlém trojúhelníku leží uvnitř, v pravoúhlém splývá s vrcholem pravého úhlu a v tupoúhlém leží vně trojúhelníku.

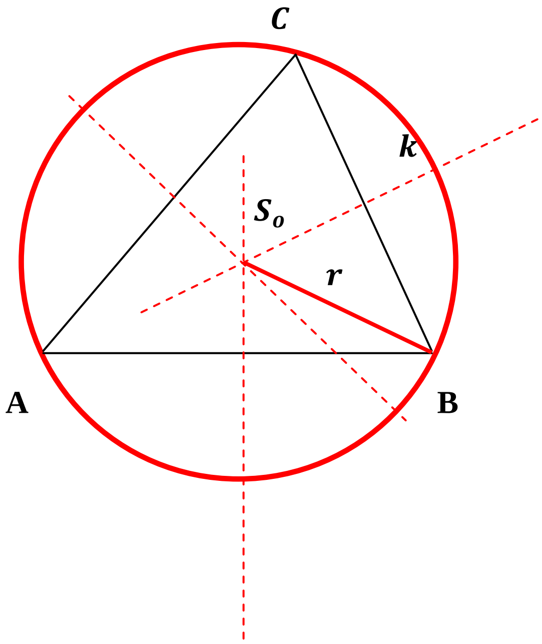
Těžnice trojúhelníku



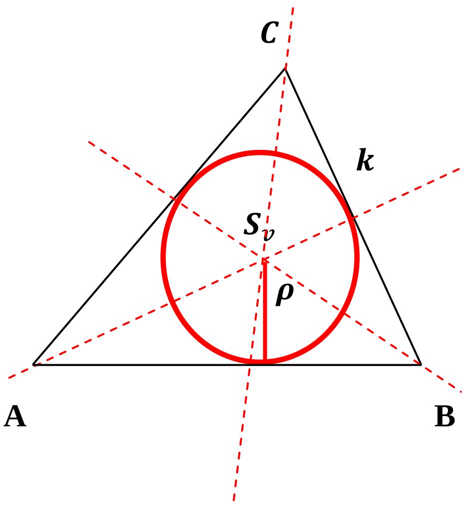
Úsečka, jejímiž krajními body jsou vrchol trojúhelníku a střed protější strany se nazývá těžnice. Těžnice (označujeme t_a, t_b, t_c) se protínají ve společném bodě T nazývaném **těžiště trojúhelníku**.

Vzdálenost těžnice od vrcholu je rovna třetinám délky příslušné těžnice.

Kružnice opsaná trojúhelníku



Kružnice, která prochází všemi vrcholy trojúhelníku se nazývá trojúhelníku **opsaná.** Její poloměr označujeme $\boldsymbol{r}$ a její střed $\boldsymbol{S_o}$ je průsečíkem os stran trojúhelníku. V ostroúhlém trojúhelníku leží uvnitř, v pravoúhlém je středem přepony a v tupoúhlém leží vně trojúhelníku.



Kružnice, která se dotýká všech tří stran trojúhelníku se nazývá trojúhelníku **vepsaná.** Její poloměr označujeme $\boldsymbol{r}$ a její střed $\boldsymbol{S_v}$ je průsečíkem os stran trojúhelníku.

V rovnostranném trojúhelníku splývá střed kružnice opsané se středem kružnice vepsané, ortocentrem a těžištěm $S_o = S_V = V = T$

Shodnost trojúhelníků

Trojúhelník ABC je shodný s trojúhelníkem $A'B'C'$ mají-li shodné všechny sobě odpovídající strany a úhly. Zapisujeme: $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$

Věty o shodnosti trojúhelníků:

Věta **sss:**

Jestliže se dva trojúhelníky shodují ve všech třech stranách, jsou shodné.

Věta **sus:**

Jestliže se dva trojúhelníky shodují ve dvou stranách a úhlu jimi sevřeném, jsou shodné.

Věta **usu:**

Jestliže se dva trojúhelníky shodují v jedné straně a ve dvou úhlech k ní přilehlých, jsou shodné.

Věta **Ssu:**

Jestliže se dva trojúhelníky shodují ve dvou stranách a úhlu proti větší z nich, jsou shodné.

Podobnost trojúhelníků

Trojúhelník $A'B'C'$ je podobný trojúhelníku ABC, existuje-li kladné reálné číslo ***k*** tak, že pro strany trojúhelníku platí: $a' = k \cdot a$, $b' = k \cdot b$, $c' = k \cdot c$

Je-li $k > 1$ je podobnost **zvětšením**, je-li $k < 1$ je podobnost **zmenšením**. (k=1 je shodnost)

Zapisujeme: $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$

Věty o shodnosti trojúhelníků:

Věta **uu:**

Jestliže se dva trojúhelníky shodují ve dvou úhlech, jsou podobné.

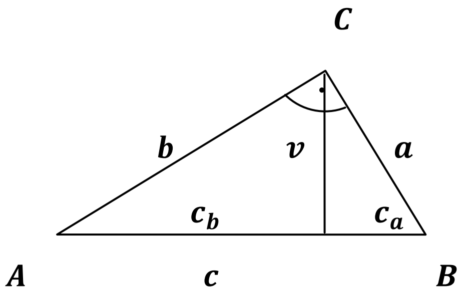
Věta **sus:**

Jestliže se dva trojúhelníky shodují v jednom úhlu a v poměru délek stran ležících na jeho ramenech, jsou podobné.

.Věta **Ssu:**

Jestliže se dva trojúhelníky shodují v poměru délek dvou odpovídajících si stran a v úhlu proti větší z nich, jsou podobné.

Věty o pravoúhlém trojúhelníku



Eukleidova věta o výšce

Druhá mocnina výšky k přeponě je rovna součinu obou úseků přepony: $\boldsymbol{v^2 = c_a \cdot c_b}$

Eukleidova věta o odvěsně

Druhá mocnina délky odvěsny je rovna součinu délky přepony a přilehlého úseku na přeponě

$\boldsymbol{a^2 = c \cdot c_a}$ $\boldsymbol{b^2 = c \cdot c_b}$

Sečtením vět o odvěsně vzniká **Pythagorova věta** $\boldsymbol{a^2 + b^2 = c^2}$

Druhá mocnina délky přepony je rovna součtu druhých mocnin délek obou odvěsen.

(významná je i věta obrácená – platí-li pro strany trojúhelníku daný vztah, pak je pravoúhlý)

Vztahy pro výpočet obvodu a obsahu

Obvod : $\boldsymbol{o = a + b + c}$

Obsah: $\boldsymbol{S = \frac{1}{2} a \cdot v_a = \frac{1}{2} b \cdot v_b = \frac{1}{2} c \cdot v_c}$

$$\boldsymbol{S = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot sin\gamma = \frac{1}{2} b \cdot c \cdot sin\alpha = \frac{1}{2} a \cdot c \cdot sin\beta}$$

Heronův vzorec: $\boldsymbol{S = \sqrt{s \cdot (s-a) \cdot (s-b).(s-c)}}$, kde $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$

Příklady k procvičení:

1. Řešte obecný trojúhelník ABC, je-li dáno:
   b=8 cm , α=45° , γ=30°

2. a=38 cm , b=48 cm , α=37°

3. a=5 m , b=4 m , γ=60°

4. a=26 cm , b=16,9 cm , c=27,3 cm

5. V trojúhelníku ABC vypočtěte vc , je-li dáno:
a=5,8 cm , b=10,3 cm , c=8,8 cm

6. V trojúhelníku ABC vypočtěte vc , je-li dáno:
a=15,4 cm , b=25,8 cm , β=68°

7. Řešte trojúhelník ABC, je-li dáno:
va=35 cm , γ=38° , β=66°

8. a=5 cm , va=2,7 cm , γ=52°

9. Určete obsah trojúhelníku ABC, je-li dáno:
a=15,4 cm , b=19,9 cm , c=25,7 cm

10. Určete obsah trojúhelníku ABC, je-li dáno:
a=13 cm , b=16 cm , γ=58°

11. Úseky přepony pravoúhlého trojúhelníku mají délky $c_a = 2cm, c_b = 8cm$. Určete výšku trojúhelníku a délky jeho odvěsen.

12. Štít skladu má tvar rovnostranného trojúhelníku. Jeho šířka činí *6m*. Jaká je výška štítu?

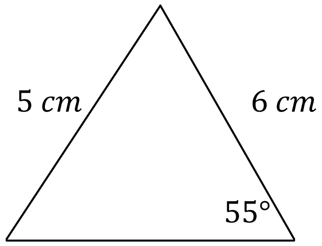
13. Žebřík délky *5,2m* je opřený o stěnu budovy tak, že s vodorovným chodníkem svírá úhel 75^o. Do jaké výšky svislé stěny dosahuje?

14. Anténní stožár je vysoký *24 m* a je ukotven čtyřmi ocelovými lany upevněnými *1,5 m* pod vrcholem. Na zemi je připevněn ve vrcholech čtverce o délce strany *12 m*. Stožár je umístěn ve středu čtverce. Vypočtěte celkovou délku ocelových lan, je-li pro upevnění každého přidat *1,1 m*.

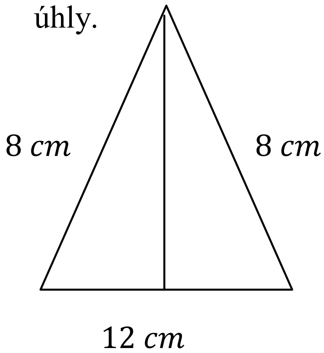
15. Lesní porost v nepřístupném terénu má přibližně tvar ostroúhlého trojúhelníku. Geodetickým měřením bylo zjištěno, že jedna strana lesa má délku *17 km*, kratší strana sní svírá úhel 69° a delší strana 42°. Určete délku hranice lesa a jeho rozlohu.

Příklady k domácí přípravě

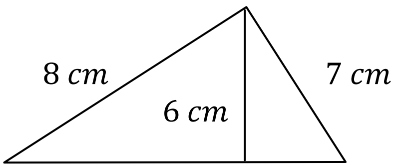
1. Obecný trojúhelník, u něhož známe délky dvou stran a jednoho vnitřního úhlu. Určete třetí stranu a vnitřní úhly tohoto trojúhelníku.



2. Rovnoramenný trojúhelník se zadanou základnou a délkou ramen. Vypočtěte výšku a vnitřní úhly.



3. Ostroúhlý trojúhelník zadaný dvěma stranami a výškou. Zjistěte délku třetí strany a obvod.



4. Rovnostranný trojúhelník zadaný obvodem, zjistěte jeho výšku a obsah.